Karlsruhe Institute of Technology

Leibniz Universität Hannover

Passive Erdölexploration aus der Luft

Zwei schlecht gestellte inverse Probleme: Quellterm- und Parameteridentifikation

Jörg Bäuerle[1], Andreas Helfrich-Schkarbanenko[1], Aron Sommer[2]

Young Investigator Network - Day, Karlsruhe, 12. October 2013

Einleitung

Auf der Suche nach unentdeckten Erdölreservoiren werden immer größere geographische und geologische Hürden genommen, sodass die Suche auf schwer zugängliche Gebiete ausgeweitet wird. Wir komplettieren ein neuartiges Messverfahren zu einer umweltfreundlichen, kostengünstigen, bildgebenden Explorationsmethode. Diese Methode macht sich zunutze, dass Erdölquellen durch seismische Aktivitäten ein elektromagnetisches Feld erzeugen, das in der Luft gemessen werden kann. Ausgehend von Maxwellgleichungen benutzen wir ein approximatives elektrostatisches Modell und implementieren es mittels Finite-Elemente-Methoden. Die inversen Probleme formulieren wir als Minimierungsprobleme und gehen ihre Schlechtgestelltheit mittels Tikhonov-Phillips-Regularisierung erfolgreich an.

1. Direktes Problem

Für gegebene $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, Bodenleitfähigkeit σ, eine Anregung f und eine Dämpfungsfunktion g ist ein elektrisches Potential u zu finden, das den Gleichungen genügt:

$$-\mathrm{div}(\sigma\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} + gu = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{1}$$

In der Praxis ist messtechnisch lediglich eine Teilmenge von u zugänglich. Auszuwerten ist also folgender Operator, wobei Γ eine Flugbahn in der Luft Ω^+ ist:

$$\Lambda : (f,\sigma) \longmapsto u \longmapsto u|_\Gamma.$$

Das direkte Problem ist nach Lax-Milgram-Lemma gut gestellt.

2. Inverses Problem

Für einen gegebenen verrauschten Messdatensatz $u|_\Gamma^\delta$ ist das Paar (f,σ) zu bestimmen. Aufzustellen und auszuwerten ist also der Operator:

$$\Lambda^{-1} : u|_\Gamma^\delta \longmapsto (f,\sigma).$$

Diese Aufgabe spalten wir in zwei Teilprobleme auf:

- Quelltermidentifikation,
- Parameteridentifikation.

Beide Probleme sind schlecht gestellt. Stabilität im Rekonstruktionsalgorithmus und die Eindeutigkeit der Lösung erreichen wir mittels Tikhonov-Phillips-Regularisierung.

3. Quelltermidentifikation

Für gegebene $u|_\Gamma^\delta$ und σ ist die Anregung f des Potentials im Boden Ω^- zu bestimmen. Gesucht ist also die Abbildung:

$$\Lambda_\sigma^{-1} : u|_\Gamma^\delta \longmapsto f.$$

Dieses *lineare* Problem lässt sich als ein regularisiertes Minimierungsproblem mittels eines Strafoperators L formulieren:

$$\min_{f\in Y} \left\{ \tfrac{1}{2}\|\Lambda(f,\sigma) - u|_\Gamma^\delta\|_X^2 + \tfrac{\alpha}{2}\|Lf\|_Y^2 \right\}$$

und für ein geeignetes α in einem Schritt lösen.

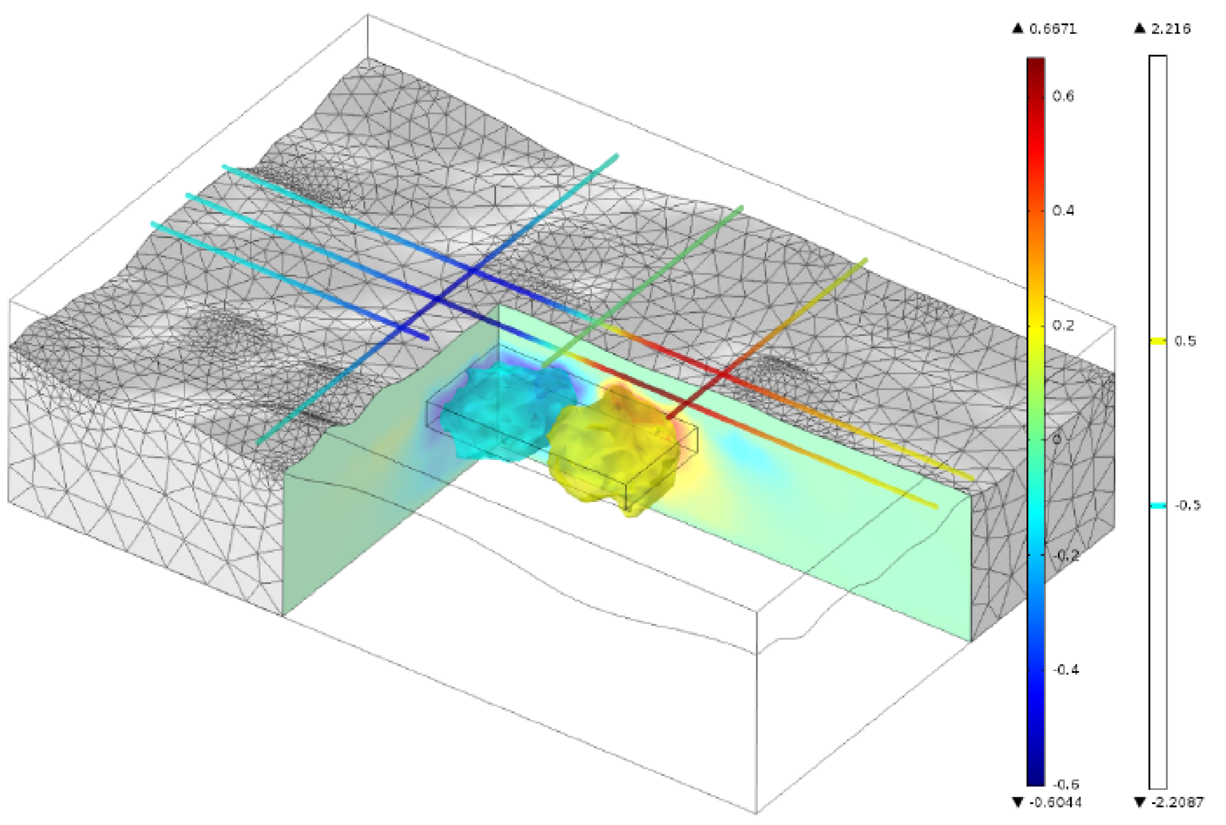

Abbildung 1: Modellierung und das Rekonstruktionsergebnis für f.

4. Parameteridentifikation

Für gegebene $u|_\Gamma^\delta$, sowie f ist σ im Untergrund Ω^- zu bestimmen. Gesucht ist also die Abbildung:

$$\Lambda_f^{-1} : u|_\Gamma^\delta \longmapsto \sigma.$$

Dieses *nichtlineare* Problem lässt sich als ein regularisiertes Minimierungsproblem mittels eines Strafoperators B und eines Schätzwertes σ^* formulieren:

$$\min_{\sigma\in Z} \left\{ \tfrac{1}{2}\|\Lambda(f,\sigma) - u|_\Gamma^\delta\|_X^2 + \tfrac{\alpha}{2}\|B(\sigma-\sigma^*)\|_Z^2 \right\}$$

und für geeignete α iterativ lösen.

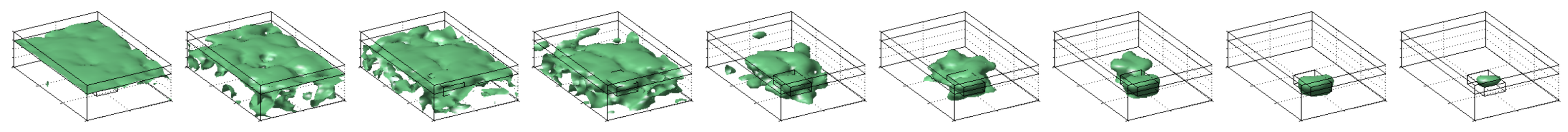

Abbildung 2: Abhängigkeit der Lösung σ vom Regularisierungsparameter α im 1. Iterationsschritt.

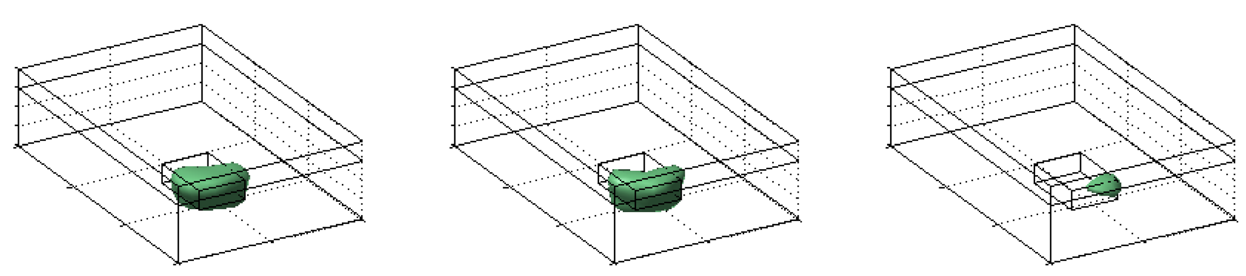

Abbildung 3: Vorgegebene und rekonstruierte σ-Anomalie im Iterationsschritt 1, 2 und 3.

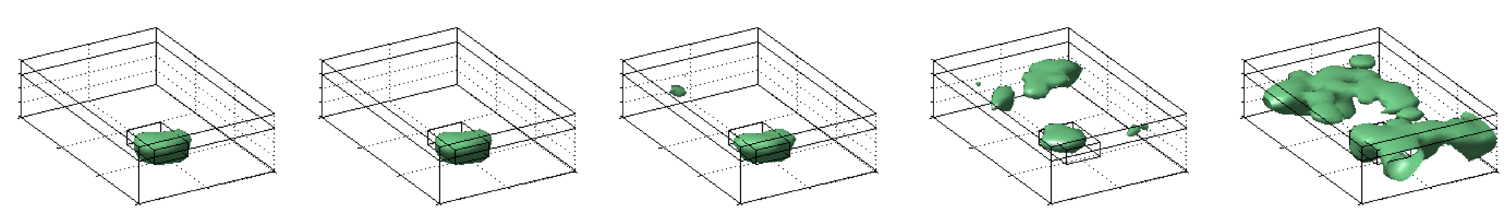

Abbildung 4: σ bei unverrauschten Daten und einem SNR von 50dB, 30dB, 20dB und 10dB.

5. Ergebnisse

Sowohl das *lineare* Quellidentifikations-, als auch das *nichtlineare* Parameteridentifikationsproblem wurden numerisch für synthetische Modelle und synthetisch generierte Messdaten in MATLAB-Umgebung mittels Finite-Elemente-Methoden erfolgreich gelöst. Die Güte der rekonstruierten Tiefenlage der Anomalien in f und σ stellt in beiden Fällen eine Herausforderung dar, die wir mittels geeigneter Strafoperatoren angehen und zum größeren Teil bewältigen. Wir stellten fest, dass für die iterative Rekonstruktion der Bodenleitfähigkeit σ nur wenige Iterationsschritte (1 bis 2) ausreichen. Regularisierte Operatoren weisen eine hinreichende Stabilität bzgl. des Rauschens in den Daten auf.

6. Ausblick

Als ein nächster Schritt bietet sich die sequentielle Kopplung beider Algorithmen für die Operatoren

$$\Lambda_\sigma^{-1} \quad \text{und} \quad \Lambda_f^{-1}$$

an. Diese Kopplung würde eine noch zu untersuchende Approximation des zentralen inversen Operators Λ^{-1} darstellen. Darüber hinaus sollten die entwickelten Rekonstruktionsalgorithmen an experimentellen Messdatensätzen getestet werden.

Literatur

[1] Aron Sommer: Passive Erdölexploration aus der Luft, Diplomarbeit, KIT, Oktober 2012.

[2] Jörg Bäuerle: Parameter Identification in Passive Airborne Oil Exploration, Diplomarbeit, KIT, August 2013.

[3] Andreas Helfrich-Schkarbanenko: Elektrische Impedanztomografie in der Geoelektrik, Dissertation, KIT, Februar 2011.

[1] Institut für Angewandte und Numerische Mathematik, Karlsruher Institut für Technologie

[2] Institut für Informationsverarbeitung, Leibniz Universität Hannover