

Mathematisches Modelieren und Simulieren

Gruppenentscheidungen

Samory Gassama, Lennart Harms, David Schneiderhan

13. Januar 2020

Fakultät für Mathematik

Karlsruher Institut für Technologie

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretische Grundlagen	1
3	Gruppenentscheidungen	3
3.1	Modelle	4
3.1.1	Externer Diktator	4
3.1.2	Interner Diktator	5
3.1.3	Gewichtete Ranking Summe	5
3.1.4	Condorcet Methode	6
3.1.5	Abstimmung	7
3.1.6	Hare Quota	8
3.2	Quota Systeme	11
3.3	Geschachtelte Modelle	11
3.4	Arrows Theorem	12
3.4.1	Pareto Prinzip und das Prinzip der Unabhängigkeit ir- relevanter Alternativen	12
3.4.2	Arrows Theorem Beweis	13
4	Modellierung	15
4.1	US Präsidentschaftswahlen	15
4.1.1	Ablauf der Wahlen	15
4.1.2	Datensatz	15
4.1.3	Simulation	16
4.1.4	Analyse	18
4.1.5	Condorcet Methode	18
4.2	Eurovision Song Contest	18
4.2.1	Ablauf der Wahlen	18
4.2.2	Datensatz	19
4.2.3	Simulation	19
4.2.4	Analyse	20
5	Diskussion	22
	Literatur	23

1 Einleitung

Der Entscheidungsprozess einer einzelnen Person ist schon eine hoch komplexe Angelegenheit. Die Beweggründe der menschlichen Psyche nachvollziehen zu können und ein rationales Wählerverhalten in einem mathematischen Modell erklären zu können ist ein wünschenswertes aber kompliziertes Unterfangen. Wie sieht dies jedoch aus, wenn wir nicht nur ein Individuum, sondern sogar eine ganze Gruppe von Wählern betrachten. Wie lassen sich deren Entscheidungen nachvollziehen, modellieren? Welche Faktoren spielen dabei eine Rolle und wie lassen sich Begriffe wie Fairness und Demokratie darin einbringen? Mit diesem Thema, Gruppenentscheidungen, soll sich die folgende Ausarbeitung befassen. Dabei werden sowohl die nötigen Grundkenntnisse aus der Volkswirtschaftslehre wiederholt, als Grundlagen zur Modellierung einer Gruppenentscheidung eingeführt. Die dann eingeführten Modelle werden auf verschiedene, wünschenswerte Eigenschaften überprüft, welche zumindest einen Teil des demokratischen Verständnisses von Entscheidungen beurteilen sollen. Anschließend werden diese Modelle zur Analyse von Wahlen verwendet werden, am Beispiel der US Präsidentschaftswahl und des Eurovision Song Contests. Abschließend werden diese Ergebnisse diskutiert und die Vor- und Nachteile der in Abschnitt 3 vorgestellten Eigenschaften aufgezeigt.

2 Theoretische Grundlagen

Zur mathematischen Modellierung von Gruppenentscheidungen ist es sinnvoll und auch notwendig zuerst die Entscheidung eines einzelnen Individuums zu betrachten. Dieser Abschnitt verwendet dafür teils Aussagen aus [1] und [2]. Wir definieren W als Menge aller Wähler bzw. Entscheider und A als Menge aller Kandidaten die zur Wahl stehen. Betrachtet man nun einen Wähler $w \in W$, so bewertet dieser im Allgemeinen die Kandidaten danach, welchen Nutzen sie für ihn haben.

Definition 2.1. Eine **Nutzenfunktion** ist eine Abbildung $u: A \rightarrow \mathbb{R}$, welche die Präferenzen eines Wählers $w \in W$ darstellen soll.

Der Wähler bevorzugt dabei einen Kandidaten $x \in A$ gegenüber einem Kandidaten $y \in A$, falls $u(x) > u(y)$. Als Nutzenfunktion werden häufig logarithmische Funktionen oder ähnliche Funktionen gewählt. Solche Funktionen können oft das Präferenzverhalten eines Einzelnen beschreiben, haben aber durch die allgemeine Definition das Problem, dass sich der Nutzen verschiedener Wähler nur schwer miteinander vergleichen lässt. Da es im späteren Verlauf auf diese Eigenschaft besonders ankommt, weichen wir von der in der

Volkswirtschaftslehre gebräuchlicheren Nutzenfunktion etwas ab und verwenden stattdessen die sogenannte Ranking Abbildung.

Definition 2.2. (*Ranking Abbildung*)

Eine Ranking Abbildung ist eine surjektive Abbildung

$$r: A \rightarrow [k] := \{1, \dots, k\} \subseteq \mathbb{N},$$

wobei $k \leq |A|$ gilt.

Dabei wird der bevorzugte Kandidat mit dem Ranking Wert 1 bewertet und die weniger präferierten Kandidaten mit aufsteigenden Werten, wobei mehrere Kandidaten den selben Ranking Wert besitzen können. In diesem Fall bevorzugt ein Wähler w , mit zugehöriger Ranking Abbildung r , $x \in A$ gegenüber $y \in A$, falls $r(x) < r(y)$.

Im Folgenden werden wir sehen, dass es sogar noch besser ist diese Präferenzen durch die damit induzierte Relation zu notieren. Als Erinnerung: Eine Relation R auf A , ist eine Menge von Tupeln $(x, y) \in A \times A$, welche die Beziehung von x zu y darstellt. In unserem Fall wäre die entsprechende Relation

$$xRy :\Leftrightarrow r(x) < r(y). \quad (2.1)$$

Bemerkung 2.3. Eine Relation, welche durch eine Nutzenfunktion induziert wird, lässt sich auch mit einer Ranking Abbildung darstellen.

Beweis. Sei $xRy \Leftrightarrow u(x) > u(y)$.

Weiter definieren wir $A_1 = \operatorname{argmax}\{u(x) | x \in A\}$ und $A_i = \operatorname{argmax}\{u(x) | x \in A \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\}$ für $i = 2, \dots, k$, wobei k so gewählt wird, dass $A_k \neq \emptyset$ und $A_{k+1} = \emptyset$. Definiere $r: A \rightarrow [k]$ wobei für $x_i \in A_i$ gilt $r(x_i) = i$. Dann gilt $xRy \Leftrightarrow r(x) < r(y) \Leftrightarrow u(x) > u(y)$ und somit die Behauptung. $\square$

Eine solche Relation kann verschiedene Eigenschaften besitzen, welche zum Teil für spätere Aussagen hilfreich sein können.

Definition 2.4. (*Eigenschaften von Relationen*)

Eine Relation R auf A heißt:

(i) **transitiv**, falls gilt:

$$\forall x, y, z \in A : xRy, yRz \Rightarrow xRz.$$

(ii) **reflexiv**, falls xRx für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(iii) **konnex**, falls alle Elemente vergleichbar sind, also für alle $x, y \in A$ gilt xRy oder yRx .

(iv) **asymmetrisch**, falls für alle $x, y \in A : xRy \Rightarrow \neg(yRx)$ gilt.

Bemerkung 2.5. Die in (2.1) definierte Relation ist transitiv und asymmetrisch.

Beweis. Folgt aus den Eigenschaften des Operators $>$ in $\mathbb{N}$. □

Dabei fassen wir diese Relationen folgendermaßen zusammen:

$$P_A := \{R \subset A \times A : R \text{ erfüllt (2.1) für eine Ranking Abbildung } r\}. \quad (2.2)$$

Wir können auch mithilfe der Ranking Abbildung r eine transitive, reflexive Relation bilden, dazu sei

$$xR^*y :\Leftrightarrow r(x) \leq r(y) \quad (2.3)$$

und

$$P_A^* := \{R \subset A \times A : R \text{ erfüllt (2.3) für eine Ranking Abbildung } r\}. \quad (2.4)$$

Entsprechend der Definition, sind die Relationen $R^* \in P_A^*$ sogar konnex und zusätzlich gilt für eine Ranking Abbildung r und die damit definierten Relationen R, R^*

$$xRy \Leftarrow \neg(yR^*x).$$

Diese Erkenntnisse nutzen wir im Folgenden um einige Möglichkeiten zur Entscheidungsfindung in der Gruppe zu modellieren.

3 Gruppenentscheidungen

Es wurde bereits W , der Raum der Wähler, eingeführt allerdings nur die Präferenzrelationen der einzelnen Wähler betrachtet. Um die Gruppenentscheidungen zu betrachten, schreiben wir $W = \{w_1, \dots, w_n\}$. Dabei seien für einen Wähler w_i die zugehörige Präferenzrelation durch $R_i \in P_A$ und die damit verbundene Ranking Abbildung mit r_i gegeben. Die im folgenden verwendeten Definitionen und Modelle beruhen dabei zum Teil auf den Werken [3],[1] und [2]. Um die Präferenz der Gruppe auszudrücken, führen wir nun die Wohlfahrtsfunktion ein.

Definition 3.1. Eine **Wohlfahrtsfunktion** ist eine Abbildung

$$K: P_A^n := P_A \times \cdots \times P_A \rightarrow P_A,$$

welche als Input die Relationen der einzelnen Wähler verwendet und eine Präferenzrelation für die Gesamtheit liefert.

Für die so entstandene Relation wünscht man sich einige Eigenschaften, welche in einer Gruppenentscheidung berücksichtigt werden sollten.

- (i) **Anonymität:** Die Stimme jedes Wählers sollte gleich gewertet werden. Falls also zwei beliebige Wähler mit unterschiedlicher Relation, die Relationen tauschen, sollte die entstandene Relation aus der Wohlfahrtsfunktion die selbe sein.
- (ii) **Neutralität:** Wenn die Relationen im Input invertiert werden, bewirkt dies das Selbe beim Output.
- (iii) **Monotonie:** Falls eine Relation aus dem Input, welche nicht den Präferenzen des Outputs entspricht, sich zur Präferenzrelation des Outputs ändert, bleibt dieser gleich.

Es wird sich zeigen, dass nicht jedes der Modelle die hier vorgestellt werden, diese Voraussetzungen erfüllt, allerdings ist es wünschenswert möglichst viele zu berücksichtigen.

3.1 Modelle

Nachdem bisher nur davon gesprochen wurde, wie eine Wohlfahrtsfunktion zur Bestimmung einer Gruppenpräferenz aussehen sollte, werden nun einige Beispiele vorgestellt.

3.1.1 Externer Diktator

Das einfachste Entscheidungsmodell einer Gruppenentscheidung ist eine Diktatur. Speziell in diesem Fall entscheidet ein Individuum, welches nicht in W liegt. Also

$$K^E(R_1, \dots, R_n) = R_d, \tag{3.1}$$

wobei $w_d \notin W$. Es wird also als Wohlfahrtsfunktion die Präferenzrelation eines unbeteiligten Wählers verwendet, welcher nicht in W enthalten ist. Dieses Modell ist weder anonym noch neutral, ist aber zumindest monoton (da der Input den Output generell nicht beeinflusst). Des weiteren übertragen sich die Eigenschaften der Relation des Wählers w_d , sie ist also transitiv und asymmetrisch.

3.1.2 Interner Diktator

Als Änderung zum vorherigen Modell, wird der Diktator hier aus der Menge der Wähler verwendet. Die Wohlfahrtsfunktion ist gegeben durch

$$K^I(R_1, \dots, R_n) = R_i, \quad (3.2)$$

wobei $w_i \notin W$. Es wird also als Wohlfahrtsfunktion die Präferenzrelation eines Wählers $w_i \in W$ verwendet, also nicht unabhängig von der Menge W . Diese Modell ist zwar nicht anonym allerdings neutral und monoton. Außerdem erhält es ebenfalls die Eigenschaften der Relation des Wählers w_i , Transitivität und Asymmetrie.

Beispiel 3.2. (*Interner Diktator*)

Gegeben seien $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ und $A = \{x, y, z\}$. Die Präferenzen der einzelnen Wähler werden im Folgenden durch ihre Ranking Abbildungen dargestellt. Der Diktator ist hier gegeben durch $w_2 \in W$.

	$r_i(x)$	$r_i(y)$	$r_i(z)$
w_1	1	2	2
w_2	3	1	2
w_3	1	2	2
$K(w_1, w_2, w_3)$	3	1	2

Tabelle 1: Beispiel - Internes Diktator Modell mit 3 Wählern und 3 Kandidaten.

3.1.3 Gewichtete Ranking Summe

Hier nutzen wir die mit den Relationen verbundenen Ranking Abbildungen der einzelnen Wähler. Summiert man nun diese Werte für jeden Kandidaten, über die Wähler $w_i \in W$ auf und versieht sie noch mit einem Gewicht $\lambda_i > 0$ so erhält man die folgende Präferenzrelation

$$xR_\Sigma y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i(x) < \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i(y). \quad (3.3)$$

Die hieraus entstandene Relation, könnte man auch wieder auf eine Ranking Abbildung zurückführen. Das Modell ist im Allgemeinen nicht anonym, für den am häufigsten verwendeten Fall von $\lambda_i = 1$ für $i \in [n]$ wird es anonym. Auf der anderen Seite ist das Modell sowohl neutral als auch monoton. Die entstandene Relation R_Σ ist transitiv und asymmetrisch, allerdings nicht reflexiv und außerdem auch nicht konnex.

Beispiel 3.3. (*Gewichtete Ranking Summe*)

Gegeben seien $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ und $A = \{x, y, z\}$. Die Präferenzen der einzelnen Wähler werden im Folgenden durch ihre Ranking Abbildungen dargestellt, als Gewichte wurden $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ gewählt.

	$r_i(x)$	$r_i(y)$	$r_i(z)$
w_1	1	2	2
w_2	3	1	2
w_3	1	2	2
$\sum$	5	5	6

Tabelle 2: Beispiel - Ranking Summen Modell mit 3 Wählern und 3 Kandidaten.

Es ist erkennbar, dass hier der hohe Rank bei $r_1(x) = 3$ auf das Ergebnis einen größeren Einfluss nimmt.

3.1.4 Condorcet Methode

Die Condorcet Methode ist eines der gebräuchlichsten Modelle. Dabei wird ein Kandidat gegenüber einem anderen präferiert, wenn mehr Wähler diesen Kandidaten gegenüber dem anderen Präferieren. Also

$$xR_c y \Leftrightarrow |\{w_i \in W : xR_i y\}| > |\{w_i \in W : yR_i x\}|. \quad (3.4)$$

Dieses Modell ist sowohl neutral als auch anonym und monoton. Zusätzlich ist R_c auch asymmetrisch, ist aber im Allgemeinen nicht reflexiv, konnex und auch nicht transitiv, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 3.4. (*Condorcet Methode*)

Gegeben seien $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ und $A = \{x, y, z\}$. Die Präferenzen der einzelnen Wähler werden im Folgenden durch ihre Ranking Abbildungen dargestellt.

	$r_i(x)$	$r_i(y)$	$r_i(z)$
w_1	1	2	3
w_2	3	1	2
w_3	2	3	1

Tabelle 3: Beispiel - Condorcet Methode mit 3 Wählern und 3 Kandidaten.

Betrachtet man nun die entstehende Relation der Condorcet Methode, gilt $xR_c y, yR_c z$ und $zR_c x$. Wenn die Relation transitiv wäre, müsste nach den

ersten beiden Aussagen auch $xR_c y$ gelten, was allerdings ein Widerspruch zur Asymmetrie ist (diese ist aufgrund der Asymmetrie von $>$ auf $\mathbb{N}$ gegeben).

Somit liefert das Condorcet Modell nicht immer einen eindeutigen Sieger, weshalb im Allgemeinen $R_c \notin P_A$ gilt. Im Fall von zwei Kandidaten ($|A| = 2$) ist die Condorcet Methode äquivalent zur gewichteten Ranking Summe mit $\lambda_i = 1$.

3.1.5 Abstimmung

Dieses Modell funktioniert ähnlich wie Condorcet, nur das anstelle der gesamten Ranking Abbildung der Wähler aus W , nur die Erststimmen der Wähler gewertet werden ($r_i(x) = 1$). Es hat also jeder Wähler $w_i \in W$ genau eine Stimme, welche er dem Kandidaten gibt, den er gegenüber allen anderen Kandidaten präferiert.

$$xR_p y \Leftrightarrow |\{w_i \in W : r_i(x) = 1\}| > |\{w_i \in W : r_i(y) = 1\}|. \quad (3.5)$$

Ein Kandidat wird also gegenüber einem anderen präferiert, falls dieser mehr Stimmen von den Wählern erhält. Das so entstandene Modell ist, genau wie das Condorcet Modell, anonym, neutral und monoton, die Relation R_p ist sogar transitiv und asymmetrisch.

Beispiel 3.5. (Abstimmung)

Gegeben seien $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ und $A = \{x, y, z\}$. Die Präferenzen der einzelnen Wähler werden im Folgenden durch ihre Ranking Abbildungen dargestellt.

	$r_i(x)$	$r_i(y)$	$r_i(z)$
w_1	1	2	3
w_2	3	2	1
w_3	1	2	3
r_p	1	3	2

Tabelle 4: Beispiel - Abstimmungsmodell mit 3 Wählern und 3 Kandidaten.

Somit entsteht bei diesem Modell eine Relation $R_p \in P_A$, es wird allerdings auch klar, dass dieses Modell eine Allgemeine Präferenz wie im Condorcet Modell oder auch in der Ranking Summe nicht belohnt.

Im Fall von zwei Kandidaten sind das Abstimmungsmodell und das Condorcet Modell äquivalent.

3.1.6 Hare Quota

Die Hare Quote ist eine Gruppenentscheidungsmethode, die kein Ranking aus P_A^n zurückgibt. Sie vergibt P Plätze anhand eines Rankings von W Wählern.

Zum Beispiel werden bei einer Kommunalwahl P Sitze im Gemeindevorstand auf Kandidaten verteilt, wobei W Wähler wählen. Kern des Verfahrens ist, dass jeder Kandidat mit mehr Erststimmen als eine zuvor gewählte Quote einen Sitz bekommt. Die Stimmen über diese Quote hinweg werden dann proportional zu den Zweitstimmen (bzw. den im Ranking auf A folgenden) auf die anderen Kandidaten weiterverteilt werden. Erreicht kein Kandidat die Quote, so wird der Kandidat mit den wenigsten Stimmen gestrichen. Seine Stimmen werden auf die im Stimmranking folgenden Kandidaten proportional aufgeteilt.

Ein Beispiel: Es gebe Kandidaten A, B, C, D und E auf 3 Plätze und es gibt 30,000 Wähler, die alle ein gültiges Wahlranking abgeben. Die Hare Quote wird auf 10,000 Stimmen festgelegt.

Im ersten Durchgang werden die Erststimmen betrachtet. Nur A erringt mit 12,000 Stimmen sofort einen Platz und hat 2000 Stimmen, die weiterverteilt werden. Es haben von allen A Erststimmenwählern 50% B und 50% C gewählt, also erhalten B und C für den zweiten Durchgang 1000 Stimmen.

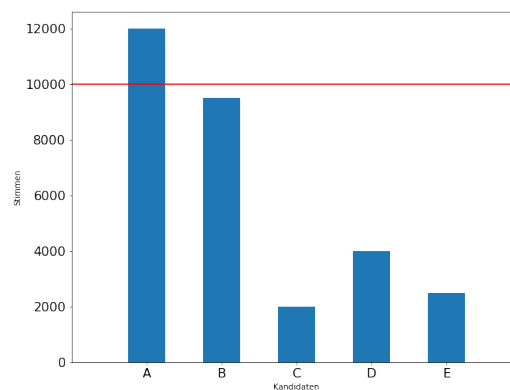


Abbildung 1: Durchgang 1

Im zweiten Durchgang hat nun B die Quote erreicht und 500 Stimmen übrig. Von allen Stimmen, die aktuell für B zählen, schauen wir uns den danach gerankten Kandidaten an. Von den dazugekommenen A Stimmen wird also die Drittstimme und von den B Erststimmzetteln die Zweitstimme be-

rücksichtigt. Proportional zu diesen werden dann die Stimmen weiter verteilt.

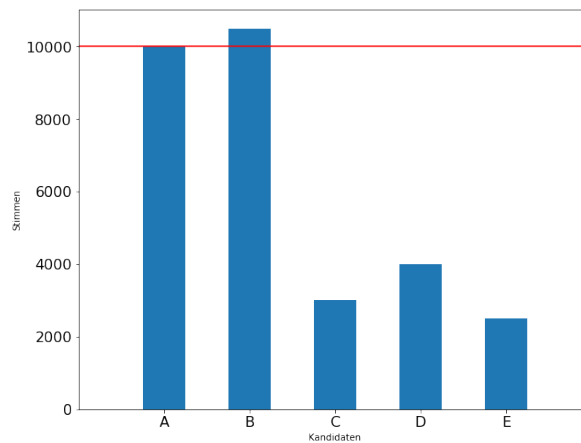


Abbildung 2: Durchgang 2

Im dritten Durchgang haben wir keinen Kandidaten, der die Quote erreicht, also wird Kandidat E mit den wenigsten Stimmen gestrichen. Bei dieser Stimmverteilung wird sogar schon die Viertstimme eines Wahlzettels mit dem Ranking $A > B > D > C > E$ berücksichtigt.

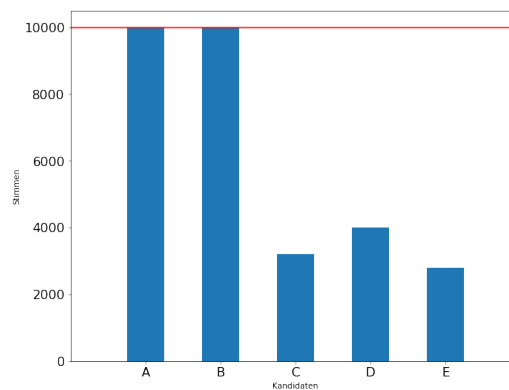


Abbildung 3: Durchgang 3

Nun haben weder C noch D die Quote erreicht, aber D wird nach der Streichungsregel mit weniger Stimmen gestrichen und umverteilt. Wie auch vorher muss man beachten, dass hierbei die nächste Stimme an einen Kandidaten berücksichtigt wird, der noch keinen Platz errungen hat. In diesem Fall werden alle Stimmen an C übertragen

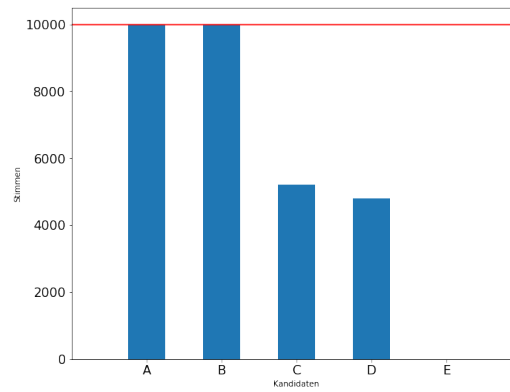


Abbildung 4: Durchgang 4

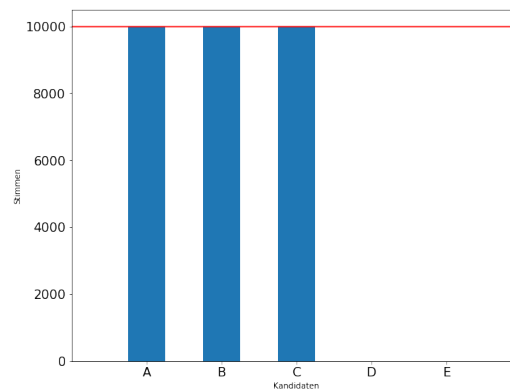


Abbildung 5: Endstand

Damit endet das Verfahren. Am Ende sieht man gut, dass Stimmen nie verloren gehen, sondern bei der Umverteilung entweder für mehrere Kandidaten in verschiedenen Gewichtungen oder bei Streichung in voller Gewichtung für den nächstpräferierten Kandidaten zählen.

Die Hare Quote liegt bei $\frac{W}{P}$, sodass genau P Kandidaten $\frac{W}{P}$ Stimmen erhalten können und damit gewählt werden. Die Droop Quote ist eine Alternative Quote, die auf die nächstgrößere ganze Zahl zu $\frac{W}{P+1}$. Man bemerke, dass die Hare Quote die höchstmögliche und die Droop Quote die kleinstmögliche Schranke ist, damit das Quotensystem noch eindeutig funktioniert

Bemerkung 3.6. *Falls kein Kandidat die Quote erreicht und Stimmen-gleichheit herrscht, entscheidet der Zufall, welcher Kandidat gestrichen wird. Der (unwahrscheinliche) Fall, dass alle Kandidaten gleich viele Stimmen haben, verbietet das Streichen beider.*

3.2 Quota Systeme

Ausgehend von einem Modell mit n Wählern und zwei Kandidaten, gibt es anwendungsbezogen auch viele Modelle, bei denen die vorherigen Modelle, so wie sie eingeführt wurden, versagen würden. Grund dafür ist, dass in der heutigen Gesellschaft bei vielen Dingen wie z. B. Gesetzesentwürfen eine einfache Mehrheit der Für Seite gegenüber der Gegenseite nicht ausreicht. Diese Fälle werden durch sogenannte Quota Systeme modelliert. Da wir hier von einem zwei Kandidaten Modell ausgehen, genügt es die Abstimmungsmethode zu betrachten (Diktator Modelle sind für Quota Systeme uninteressant). Dabei wird nun eine Quote q eingeführt, mit

$$\frac{n}{2} < q \leq n.$$

Das Ergebnis zwischen den beiden Kandidaten wird als Unentschieden gewertet, bis die Anzahl der Stimmen für einen Kandidaten q übersteigt.

Die Quota Systeme können auch noch auf eine größere Anzahl an Kandidaten erweitert werden (ähnlich wie in Abschnitt 3.1.6), indem die Quote und die untere Grenze entsprechend angepasst wird. Es gilt allerdings zu erwähnen, dass in diesem Fall die unterschiedlichen Methoden auch unterschiedliche Ergebnisse liefern können.

3.3 Geschachtelte Modelle

Zusätzlich kann jedes Modell erweitert werden indem man eine weitere Ebene von Entscheidungen hinzufügt. Am besten lässt sich dies an einem beispielhaften Schema erklären. Wir teilen zunächst die Wählermenge W auf. Seien $W_1, W_2, W_3 \subseteq W$, sodass diese paarweise disjunkt sind und $W_1 \cup W_2 \cup W_3 = W$. Nun wird für jede Wählermenge W_i ein unabhängiges Modell zur Bestimmung einer Präferenzrelation verwendet. Die so entstandenen Relationen, bilden eine neue Menge von Wählern V , welche dann eine neue Wahlebene bilden. Mit einem neuen Modell können diese dann die endgültige Präferenzrelation des Gesamtmodells bestimmen. Dieser Prozess kann mit beliebig vielen Wahlebenen wiederholt werden und auf beliebig viele Wählermengen aufgeteilt werden. Im folgenden Beispiel seien $w_1, \dots, w_k \in W_1; q_1, \dots, q_k \in W_2; u_1, \dots, u_k \in W_3$ sowie $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, mit zugehörigen Relationen aus P_A .

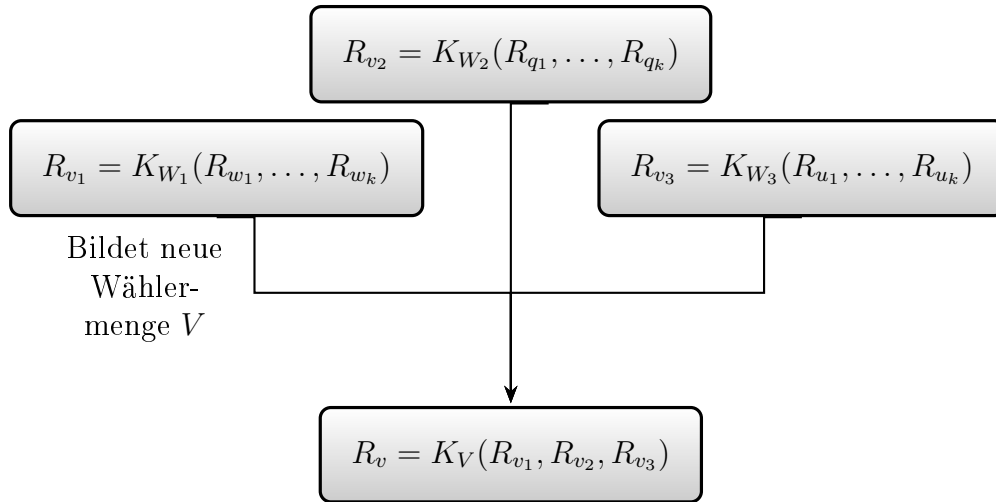


Abbildung 6: Beispielschema für geschachteltes Modell mit 3 Wahlgruppen im ersten Durchgang und einer Wahlgruppe im zweiten Durchgang. Hierbei beschreibt R_v die Relation ist, welche die endgültige Gruppenentscheidung beschreibt.

Wir werden in Abschnitt 4 noch ein Beispiel dafür sehen, wie eine solches geschachteltes Modell aussehen kann.

3.4 Arrows Theorem

Bei der Auswahl eines Abstimmungsverfahrens $P_A^n \rightarrow P_A$ kann man schnell zwei - einzeln - sehr sinnvolle Forderungen stellen.

3.4.1 Pareto Prinzip und das Prinzip der Unabhängigkeit irrelevanter Alternativen

Zum einen möchten wir, wenn alle Abstimmenden xRy fordern, genau diese Relation xRy im Abstimmungsergebnis wiederfinden. Dies nennt man Einstimmigkeitsprinzip oder auch **Pareto Prinzip**.

Die zweite Forderung, die wir stellen, ist die Unabhängigkeit einer Relation im Ergebnis von allen anderen, sozusagen Unbeteiligten, Alternativen. Wenn die Ergebnisrelation xRy enthält streichen wir z.B. z als dritte Variable aus allen Abstimmungen heraus, ohne die ursprüngliche Reihenfolge, also die anderen Relationen zu beeinflussen. Dann soll unser Abstimmungsverfahren mit den neuen Daten weiterhin xRy enthalten. Insbesondere soll

eine relative Veränderung im Ranking, die aber xRy erhält, auch in der Ergebnisrelation xRy erhalten. Diese Forderung nennt man das **Prinzip der Unabhängigkeit irrelevanter Alternativen**.

Wir werden sehen, dass diese beiden Forderungen vereint bereits unerwünschte Auswirkungen auf die Wahl des Abstimmungsverfahrens haben. Ein Ranking Abstimmungsverfahren kann unter diesen Voraussetzungen nur ein interner Diktator sein. Arrow's Theorem wird diese Behauptung beweisen.

3.4.2 Arrows Theorem Beweis

In diesem Abschnitt genüge unser Entscheidungsverfahren $P_A^n \rightarrow P_A$ dem Pareto Prinzip und dem Prinzip der Unabhängigkeit irrelevanter Alternativen. Außerdem sei $|A| > 2$. Der Abschnitt beruht dabei zu Teilen auf [3].

Definition 3.7. Sei P eine Situation, d.h. eine Wahl eines Rankings aus fest gewählten P_A^n nach festgelegtem Wahlverfahren. Weiterhin sei W ein Wähler mit zugehörigem Ranking aus P_A und $X, Y \in A$.

- W heißt in einer Situation P **ausschlaggebend** für X und Y , wenn sich die Ergebnisrelation entsprechend der Relation von W bezüglich X und Y ändert.
- W heißt **extrem ausschlaggebend** in P für eine Alternative X , wenn W ausschlaggebend für alle möglichen Paare (X, Z) mit $Z \in A$ ist.
- W ist **paarweiser Diktator** in P für X und Y , wenn W ausschlaggebend für X und Y ist.
- Falls W in P für alle Paare paarweiser Diktator ist, heißt W **lokaler Diktator**. Ein **Diktator** ist ein Wähler W , der für alle Situationen lokaler Diktator ist.

Lemma 3.8. Falls alle Wählenden ein $Z \in A$ entweder auf die erste oder die letzte Position ranken, dann ist Z im Endergebnis ebenfalls auf erster oder letzter Position.

Beweis. Sei also $Z \in A$ in den Wählendenrankings entweder erste oder letzte Alternative.

Annahme: Z ist im Endergebnis nicht erste oder letzte Alternative.

Da $|A| > 2$, wähle von Z verschiedene Alternativen $X, Y \in A$. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass im Endergebnis die Relation $X > Z > Y$ gilt.

Wegen der Unabhängigkeit irrelevanter Alternativen dürfen wir auf jedem Wahlzettel Y vor X umsortieren, ohne dass sich das Endergebnis bezüglich Z ändert. Da Z immer extrem positioniert ist, ändert sich auf keinem Wahlzettel die Relation zwischen X und Z und zwischen Y und Z .

Da jetzt alle Wahlzettel Y vor X präferieren, muss nach dem Pareto Prinzip auch auf dem Endergebnis Y vor X gelten. Es gilt dann X vor Z , Z vor Y und Y vor X , ein Widerspruch. zur Grundannahme, dass das Endranking ein echtes Ranking ist. Demnach muss Z im Endergebnis extrem positioniert werden. $\square$

Satz 3.9. *Jedes Ranking Entscheidungsverfahren, das dem Pareto Prinzip und dem Prinzip irrelevanter Alternativen genügt, besitzt einen inneren Diktator.*

Beweis. Sei $W_1, W_2, \dots, W_n$ die Menge der n Wählenden. Wir konstruieren Fälle wie im vorigen Lemma: P_0 sei die Situation, in der jeder Z auf den letzten Rang setzt, in P_1 ist C im Ranking von W_1 vom letzten auf den ersten Platz gesetzt, usw. bis in P_n alle Z auf den ersten Platz gesetzt haben.

Nach vorigem Lemma kann Z im Ergebnisranking nur extreme Positionen erzielen. Daraus folgern wir, dass es ein P_k geben muss, bei dem Z frühestens auf den ersten Platz wechselt. Nach der Monotonieeigenschaft bleibt Z bei allen weiteren $P_l, l > k$ auf dem ersten Platz im Ergebnisranking. Wir stellen fest, dass W_k extrem ausschlaggebend für Z in den Situationen P_{k-1} und P_k ist.

Betrachten wir als nächstes den Einfluss von W_k auf zwei weitere Alternativen $X, Y \in A$. In P_k steht Z auf dem ersten Platz von W_k und wir wissen, dass W_k extrem ausschlaggebend ist. $X > Z$ kann also nur gelten, wenn W_k $X > Z$ rankt. Aus dem Pareto Prinzip und der Unabhängigkeit irrelevanter Alternativen folgt auch die Rückrichtung, da ja alle anderen Wähler beliebig bis auf die Positionierung von Z sind. Da W_k auch in P_{k-1} ausschlaggebend ist, folgern wir analog, dass im Endergebnis $Z > Y$ genau dann gilt, wenn W_k $Z > Y$ wählt. Transitiv gilt im Endergebnis dann also $X > Y$ wegen der Unabhängigkeit irrelevanter Alternativen und da wir bis auf die Positionierung von Z keine Anforderungen an die restlichen Wähler gemacht haben. Damit haben wir gezeigt, dass W_k für jedes Alternativenpaar, in dem nicht Z enthalten ist, paarweiser Diktator ist.

Die gleiche Argumentation können wir mit einer anderen Alternative U durchführen und finden einen potentiellen Kandidaten W_j , der für jedes Alternativenpaar, in dem U nicht vorkommt, paarweiser Diktator ist. Insbesondere ist W_j paarweiser Diktator für X und Z , da wir annehmen, dass U weder gleich

X noch Z ist. Wie wir aber oben schon festgestellt haben, ändert sich im Übergang von P_{k-1} auf P_k die Ergebnisrelation für X und Z nur durch verändern von W_k und das heißt, dass W_k gleich W_j sein muss und der gesuchte Diktator ist. $\square$

Bemerkung 3.10. *Eine Umformulierung von Arrows Theorem ist die Folgende: Es ist unmöglich, ein Abstimmungsverfahren $P_A^n \rightarrow P_A$ zu finden, dass die drei Kriterien erfüllt:*

- (i) *Kein Diktator*
- (ii) *Pareto Prinzip*
- (iii) *Prinzip der Unabhängigkeit irrelevanter Alternativen*

4 Modellierung

4.1 US Präsidentschaftswahlen

4.1.1 Ablauf der Wahlen

Wie beschrieben in [4]. Bei den Präsidentschaftswahlen in den Vereinigten Staaten von Amerika, wird per indirekte Wahl der Präsident für eine vierjährige Amtszeit bestimmt. Der Präsident wird nicht direkt vom Volk gewählt, sondern von den Bundesstaaten durch Wahlmänner. Jeder Bundesstaat hat unterschiedlich viele Wahlmänner. Die Anzahl der Wahlmänner hängt von der Bevölkerungsgröße ab. In fast allen Bundesstaaten gewinnt der Kandidat mit den meisten Stimmen alle Wahlmänner. Am Ende wird der Kandidat, der die meisten Stimmen von den Wahlmännern bekommt, Präsident. Nicht wahlberechtigt sind: Minderjährige, Gefängnisinsassen und Staatsbürger aus Außengebieten.

4.1.2 Datensatz

Wir verwenden zwei Datensätze, um die Präsidentschaftswahlen 2016 in den USA zwischen Donald Trump und Hillary Clinton zu simulieren. Unsere Daten bestehen aus einer Excel-Datei [5] und einer CSV-Datei [6].

`nytimes_presidential_elections_2016_results_county.csv` informiert uns über die Anzahl der Stimmen von Donald Trump und Hillary Clinton in den verschiedenen Wahlbezirken der USA. Die beinhaltete Tabelle umfasst folgende Spalten

- Trump: Anzahl der Stimmen für Donald Trump.

- Clinton: Anzahl der Stimmen für Hillary Clinton.
- Rpt: Bedeutung ist uns Unbekannt aber in unserer Tabelle hat diese ganze Spalte den durchgehenden Wert 100. Außerdem hat sie keine Relevanz in unserer Simulation.
- State: Bundesstaat in der Wahl durchgeführt wurde.
- Vote by County: Bezirk in der Wahl die durchgeführt wurde.
- Vote by town: Stadt in der Wahl die durchgeführt wurde.
- Place: Name Wahlortes, also der Name des Wahlbezirkes.

Anmerkung: Für jede Zeile befindet sich ein Eintrag in der Spalte „Vote by County“ oder in der Spalte „Vote by town“, die andere hingegen ist dann leer. US_Election_Tracker.xlsx informiert uns über die Anzahl der

	Clinton	Trump	Rpt	State	Vote by county	Vote by town	Place
0	151581.0	130614.0	100	Alabama	Jefferson	NaN	Jefferson
1	68429.0	91087.0	100	Alabama	Mobile	NaN	Mobile
2	62435.0	89199.0	100	Alabama	Madison	NaN	Madison
3	22927.0	72846.0	100	Alabama	Shelby	NaN	Shelby
4	58669.0	33928.0	100	Alabama	Montgomery	NaN	Montgomery

Abbildung 7: Ausschnitt der CSV Datei.

Wahlmänner für jeden Bundesstaat. Folgende Spalten sind in unserem Datensatz enthalten:

- State: Name des Bundesstaats.
- ABBR: Abkürzung des Bundesstaates.
- Electoral Votes: Anzahl der Wahlmänner.

4.1.3 Simulation

Für diese Fall ist W die Menge aller Wahlberechtigten US Bürger und $A = \{Trump, Clinton\}$. Wir haben zwei Datensätze woraus wir unsere Information beziehen aber nicht alle Information sind für unsere Simulation relevant. Deshalb bereinigen wir zuerst unsere Daten. Vorteile bei einer Bereinigung

	STATE	ABBR	ELECTORAL VOTES
0	Alabama	AL	9
1	Alaska	AK	3
2	Arizona	AZ	11
3	Arkansas	AR	6
4	California	CA	55
5	Colorado	CO	9
6	Connecticut	CT	7
7	Delaware	DE	3
8	District of Columbia	DC	3
9	Florida	FL	29
10	Georgia	GA	16
11	Hawaii	HI	4
12	Idaho	ID	4

Abbildung 8: Ausschnitt der Excel Datei.

sind zum Beispiel, dass man über die Daten eine bessere Übersicht hat, die Simulationszeit niedriger ist und die Fehleranfälligkeit geringer wird. Wir verwenden für die Datenbereinigung die Software Easymorph Version 4.0.1. Dazu wird zuerst ein left join über die Spalte „State“ durchgeführt, um jeden Bundesstaat in unserer CSV Tabelle seiner Anzahl an Wahlmännern zu zuordnen. Danach wurden sämtliche, für unsere Berechnung irrelevanten Spalten gelöscht. Es sind die Spalten: „RPT“, „Vote by County“ und „Vote by Town“. Die Spalte „ABBR“ wurde beim left join nicht in die Wahlergebnistabelle berücksichtigt weshalb sie sich auch nicht mehr in unsere Daten befindet.

Um nun die Simulation durchzuführen wurde Google Colab verwendet. Die benutzte Programmiersprache ist Python. Dabei wird die Wahl entsprechend des Prinzips der US Wahl simuliert:

Wir summieren die Anzahl der Stimmen für alle Kandidaten in jedem Staat über die die Zeile „Place“ und speichern sie in einer neuen Spalte. Anschließend vergleichen wir die Anzahl der Stimmen von Trump und Clinton in jedem Bundesstaat. Dem Gewinner eines Staates werden die Anzahl der Wahlmänner dieses Bundesstaates in sein Endergebnis addiert. Zum Schluss werden die Anzahl der Wahlmänner, welche für die Kandidaten gestimmt haben verglichen und das Ranking wird abgebildet.

Nach dieser Wahl erhält Trump 304 Wahlmänner. Clinton hingegen kommt auf 227 Wahlmänner. Trump gewinnt die Wahlen in 30 Bundesstaaten und Clinton in 20 Bundesstaaten.

Somit wäre die resultierende Relation $TrumpR_{US}Clinton$.

4.1.4 Analyse

Das Modell der US Präsidentschaftswahlen ist ein geschachteltes Modell. Im ersten Schritt, werden in allen 52 Staaten die Wahlen, mit den US Bürgern des jeweiligen Staates als Wähler, mithilfe des Condorcet Modells durchgeführt. Im zweiten Schritt bilden eben jene 52 Staaten die neue Wählermenge, welche dann über eine gewichtete Rank Summe den endgültigen Präsidenten bestimmen. Alternativ könnte man im zweiten Schritt die Wahlmänner der 52 Staaten als neue Wählermenge verwenden und deren Präferenzrelation mit der des jeweiligen Staates abgleichen. Dementsprechend wäre es dann erneut ein Modell nach der Condorcet Methode.

4.1.5 Condorcet Methode

Alternativ zum geschachtelten Modell, wird in diesem Schritt die Abstimmungsmethode direkt auf die gesamte Menge W angewandt. Dabei erhält Trump 62.984.828 Stimmen, während Clinton 65.853.514 erhält. Die daraus resultierende Relation wäre $ClintonR_pTrump$, also so, wie die Wahl nicht ausgegangen ist. Eine Beurteilung dieser Ergebnisse folgt in Abschnitt 5.

4.2 Eurovision Song Contest

4.2.1 Ablauf der Wahlen

Die Regeln für den Eurovision Song Contest werden von der European Broadcasting Union (EBU) festgelegt und wurden hier entsprechend aus [7] entnommen. Einen garantierten Startplatz im Finale haben die größten EBU-Geldgeber und der Titelverteidiger. Zu diesem Kreis zählen immer Deutschland, Frankreich, Großbritannien, Spanien und Italien als "Big Five Länder" sowie das Land, das im Vorjahr den Titel gewonnen hat und damit Gastgeberland ist. Die weiteren Finalplätze werden an die jeweils zehn besten Teilnehmer der Halbfinale vergeben; das Feld des Finales umfasst also 26 Acts. Aus den Televoting-Ergebnissen und den Jurywertungen jedes einzelnen Landes setzt sich das Gesamtergebnis für jeden Teilnehmer zusammen. Die besten zehn Titel werden mit eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, zehn und zwölf Punkten bewertet. Dabei werden die Jury- und Zuschauerwertungen seit 2016 voneinander getrennt. Jedes Land kann einem Teilnehmer also bis zu 24 Punkte geben - zwölf durch die Jury, zwölf durch die Zuschauer. Wenn zwei Songs auf die gleiche Punktzahl kommen, bekommt das Land die höhere Punktzahl, das vom Publikum höher bewertet wurde. Das Zuschauervotum hat in diesem Fall also Vorrang. Sollte auch die Zahl der Zuschauerstimmen für die beiden Songs genau gleich sein, liegt der Song

vorne, der die höhere Jurywertung erhalten hat. Sollte auch die Jurywertung für beide Songs gleich sein, stimmt die Jury in einer Mehrheitsentscheidung ab, welcher Song vorne liegt.

4.2.2 Datensatz

Als Datensatz verwenden wir die Excel-Datei [8] mit den Ergebnissen der Votings des ESC aus den Jahren 1975 bis 2019. Folgende Spalten sind in unseren Datensatz enthalten:

- Year: Entspricht dem Jahr.
- (semi-) final: Informiert uns ob es das Finale, erstes Halbfinale oder zweites Halbfinale ist, z. B. f steht für final.
- Edition: Ist eine kombinierte Spalte zwischen den Spalten Year und (semi-) final.
- Jury or Televoting: Informiert uns ob es sich um ein Voting der Jury oder ein Televoting handelt.
- From Country: Hier steht der Name des Landes welches gewählt hat.
- To country: Hier stehen die Namen der Kandidaten (Länder), welche bewertet wurden.
- Point: Die erhaltene Bewertung in Punkten.
- Duplicate: Hier wird verifiziert ob für die gleiche Zeile das gleiche Land in der Spalte „To Country“ und „From Country“ (ist für unsere Analyse nicht relevant).

4.2.3 Simulation

In diesem Fall besteht W aus diversen Teilmengen, einerseits wird die Menge in die stimmberechtigten Länder des ESC unterteilt und zusätzlich wählen in jedem Land die Jury und die Zuschauer. Interessant ist hierbei, dass die Kandidaten A_w sich für die einzelnen Wähler verändern. Im Allgemeinen sind in den verschiedenen Finals, die Teilnehmer auch die Kandidaten, allerdings steht jedem Teilnehmerland das eigene Land nicht als Kandidat zur Verfügung. Also $A_w = A \setminus w$, wobei A die Teilnehmer sind.

An dieser Stelle wurden wie im vorherigen Beispiel die Daten erneut bereinigt. Wir beschränken uns auf die Wahlergebnisse aus dem Jahr 2019 und

Year	(semi-) final	Edition	Jury or Televoting	From country	To country	Points	Duplicate
1975	f	1975f	J	Belgium	Belgium	0	x
1975	f	1975f	J	Belgium	Finland	0	
1975	f	1975f	J	Belgium	France	2	
1975	f	1975f	J	Belgium	Germany	0	
1975	f	1975f	J	Belgium	Ireland	12	
1975	f	1975f	J	Belgium	Israel	1	
1975	f	1975f	J	Belgium	Italy	6	
1975	f	1975f	J	Belgium	Luxembourg	0	
1975	f	1975f	J	Belgium	Malta	7	
1975	f	1975f	J	Belgium	Monaco	0	
1975	f	1975f	J	Belgium	Norway	0	
1975	f	1975f	J	Belgium	Portugal	0	

Abbildung 9: Ausschnitt der ESC Voting Tabelle.

betrachten dabei beide Halbfinale und das Finale.

Die bereinigten Daten enthalten somit die Jurywertungen und die Zuschauerwertungen der einzelnen Wähler. Dabei werden in diesem Modell die Punkte der Kandidaten aufsummiert und das Ranking entsprechend der erhaltenen Punkte erstellt. Es zeigen sich die folgenden Ergebnisse.

Year	Country	Position	Points
2019	Australia	1	260
2019	Czech Republic	2	238
2019	Iceland	3	218
2019	Estonia	4	193
2019	Greece	5	183
2019	Slovenia	6	165
2019	Serbia	7	154
2019	San Marino	8	149
2019	Cyprus	9	143
2019	Belarus	10	119
2019	Poland	11	119
2019	Hungary	12	94
2019	Belgium	13	68
2019	Georgia	14	59
2019	Portugal	15	50
2019	Montenegro	16	46
2019	Finland	17	22

Abbildung 10: Ergebnis 1. Halbfinale.

4.2.4 Analyse

Abgesehen davon, dass es sich auch hierbei wieder um ein geschachteltes Modell handelt, werden hierbei auch noch die gewichtete Ranking Summe und ein externes Diktator Modell verwendet. Die gewichtete Ranking Summe betrifft sowohl das Jury als auch das Televoting, da diese verschiedene Punkte

Year	Country	Position	Points
2019	The Netherlands	1	279
2019	North Macedonia	2	236
2019	Sweden	3	235
2019	Switzerland	4	232
2019	Azerbaijan	5	221
2019	Russia	6	216
2019	Norway	7	208
2019	Malta	8	154
2019	Albania	9	96
2019	Denmark	10	90
2019	Lithuania	11	89
2019	Moldova	12	85
2019	Romania	13	67
2019	Croatia	14	59
2019	Latvia	15	48
2019	Armenia	16	47
2019	Austria	17	16
2019	Ireland	18	16

Abbildung 11: Ergebnis 2. Halbfinale.

Year	Country	Position	Points
2019	The Netherlands	1	498
2019	Italy	2	472
2019	Russia	3	370
2019	Switzerland	4	364
2019	Sweden	5	334
2019	Norway	6	331
2019	North Macedonia	7	305
2019	Azerbaijan	8	302
2019	Australia	9	284
2019	Iceland	10	232
2019	Czech Republic	11	157
2019	Denmark	12	120
2019	Cyprus	13	109
2019	Malta	14	107
2019	Slovenia	15	105
2019	France	16	105
2019	Albania	17	90
2019	Serbia	18	89
2019	San Marino	19	77
2019	Estonia	20	76
2019	Greece	21	74
2019	Spain	22	54
2019	Israel	23	35
2019	Belarus	24	31
2019	Germany	25	24
2019	United Kingdom	26	11

Abbildung 12: Ergebnis Finale.

verteilen und die 5 Jury Mitglieder die selbe Punktezahl verteilen wie die gesamten Televoter eines Landes. Auf der anderen Seite sind die Big Five Länder vom Halbfinale befreit, es wird also unabhängig von den Wählern entschieden, dass diese präferiert werden.

5 Diskussion

Gruppenentscheidungen sind eine komplexe Angelegenheit. Für unterschiedliche Szenarien ein geeignetes - und vor allem faires - Abstimmungsverfahren zu finden kann schon vor dem eigentlichen Entscheidungsprozess vorangestellt zu Problemen führen. Wie man in Abschnitt 4.1 sieht, können zwei scheinbar demokratische Modelle, zwei gegensätzliche Ergebnisse hervorrufen. Das liegt daran, dass die Stimmen der Wahlmänner in den US Bundesstaaten nicht relativ nach den Wahlergebnissen aufgeteilt werden, sondern lediglich der Gewinner dieser Wahl die Stimmen der Wahlmänner erhält, unabhängig davon ob das Ergebnis knapp oder eindeutig war. Dies bedeutet, dass mehrere gewünschte Eigenschaften des Modells nicht erfüllt sind. Auf der anderen Seite zeigen sich auch Probleme wenn wir zu viele Forderungen an unser Modell stellen. Für den Fall, dass das Abstimmungsergebnis ein Ranking ist, sagt uns Arrows Theorem, dass wir entweder einen Diktator akzeptieren, oder gewisse Abstriche an unsere Forderungen an das Entscheidungsverfahren machen müssen. Anders gesagt: Es gibt keine perfekte Gruppenentscheidung. Die Überlegung, das Pareto Prinzip auf eine 90% Mehrheit abzuschwächen führt dazu, dass ein Diktator ausgeschlossen wird, dennoch gibt es auch hier Probleme, z.B. mit Minderheitenschutz. Das Ausdenken von geeigneten Entscheidungssystemen ist seit Anbeginn der Menschheit eine Herausforderung. Ob man die einfachste Möglichkeit des Diktators wählt, der, wie die Geschichte beweist, doch keineswegs so gerecht ist, wie Pareto und Unabhängigkeit vermuten lassen, oder ob man sich etwas wie das Verfahren des Eurovision Songcontest ausdenkt, hängt dabei von einer Vielzahl von Faktoren ab, die selbst noch viel komplexer sind, als die reine Modellierung eines Verfahrens. Selbst bei verhältnismäßig einfachen Wahlen zwischen zwei Alternativen kommt es zu offensichtlichen Verzerrungen des Wählerwillens in den USA. Wie angemerkt lässt sich eine versteckte Gewichtung der Wählerstimmen feststellen, die mit einer Verletzung der Anonymität aus Kapitel 3 einhergeht, also einer viel grundlegenderen Eigenschaft als "nur" des Einstimmigkeitsprinzips und der Unabhängigkeit irrelevanter Alternativen. Ein grundlegendes Problem dabei ist, dass die Gewinnerpartei nach Gewinn solcher Wahlen keinen besonders großen Grund hat, das Wahlsystem zu reformieren.

Literatur

- [1] Alan D. Taylor and Allison M. Pacelli. *Mathematics and Politics - Strategy, Voting, Power, and Proof*. Springer Science and Business Media, Berlin Heidelberg, 2nd corrected ed. 2008, corr. 3rd printing 2009 edition, 2009.
- [2] Hans-Joachim Bungartz, Stefan Zimmer, Martin Buchholz, Dirk Pflüger, Sabine Le Borne, and Richard Le Borne. *Modeling and Simulation - An Application-Oriented Introduction*. Springer Science and Business Media, Berlin Heidelberg, 2014. Aufl. edition, 2013.
- [3] W.D. Wallis. *The Mathematics of Elections and Voting*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2014. Aufl. edition, 2014.
- [4] *Verfassungsrecht und Verfassungspraxis der Vereinigten Staaten* -. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2013.
- [5] US_Election_Tracker.xlsx. https://indzara.com/wp-content/uploads/2016/11/2016_US_Election_Tracker.xlsx, 2016. [Online; accessed 4-January-2020].
- [6] nytimes_presidential_elections_2016_results_county.csv. https://github.com/kidpixo/presidential_election_usa_2016/blob/master/nytimes_presidential_elections_2016_results_county.csv, 2016. [Online; accessed 29-December-2019].
- [7] ESC Regelwerk. <https://www.eurovision.de/event/Die-Regeln-des-ESC,regeln103.html>, 2019. [Online; accessed 25-December-2019].
- [8] ESC Datensatz. <https://data.world/datagraver/eurovision-song-contest-scores-1975-2019>, 2019. [Online; accessed 25-December-2019].