Analysis 1-Kurzskript

Prof. Dr. Wolfgang Reichel

Wintersemester 2012/2013

– In LaTeX gesetzt von Norman Weik –

Liebe Studierende der Vorlesung Analysis 1,

in diesem Kurzskript finden Sie alle Sätze, Hilfssätze, Definitionen und Aussagen der Vorlesung. Beweise, Rechnungen, Kommentare und Erläuterungen, die in der Vorlesung dargestellt werden, finden Sie hier nicht.

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen, Funktionen, reelle Zahlen **4**

1.1 Mengen 4
1.2 Funktionen 4
1.3 Reelle Zahlen 6

2 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion **10**

2.1 Natürliche Zahlen 10
2.2 Beweise durch vollständige Induktion 10
2.3 Beziehung zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ 11
2.4 Ganze Zahlen, rationale Zahlen 11
2.5 Endliche Mengen, abzählbare Mengen 12
2.6 Summen- und Produktzeichen 13
2.7 Binomialkoeffizienten 13

3 Polynome und n-te Wurzeln **15**

3.1 Polynome 15
3.2 Monotone Funktionen 17
3.3 Die Lipschitz-Bedingung 17

4 Zahlenfolgen, Konvergenz, Exponentialfunktion, Logarithmus und allgemeine Potenzfunktion **20**

4.1 Zahlenfolgen und Konvergenz 20
4.2 Exponentialfunktion, Logarithmus und allgemeine Potenzfunktion 23
4.3 Häufungswerte von Folgen, Konvergenzkriterium von Cauchy 26

5 Unendliche Reihen **28**

5.1 Reihen mit positiven Gliedern 29
5.2 Alternierende Reihen 30
5.3 Konvergenzkriterien 31
5.4 Doppelreihen 34
5.5 Multiplikation von Reihen 35

6 Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit **37**

7 Potenzreihen **44**

7.1 Punktweise/gleichmäßige Konvergenz 44
7.2 Anwendung auf Funktionenreihen 45

7.3 Die Exponentialreihe . . . 46
7.4 Sinus, Cosinus . . . 47
7.5 Arcusfunktionen . . . 48
7.6 Hyperbelfunktionen . . . 48
7.7 Areafunktionen . . . 49

8 Komplexe Zahlen **50**
8.1 Folgen . . . 51
8.2 Reihen . . . 52
8.3 Funktionen . . . 53
8.4 Potenzreihen . . . 55
8.5 Komplexe Exponentialfunktion . . . 56

9 Differentiation **59**
9.1 Differenzenquotient, Ableitung . . . 59
9.2 Rechenregeln für Ableitungen . . . 61
9.3 Mittelwertsatz und Folgerungen . . . 62

10 Das Riemannsche Integral **65**
10.1 Ober- und Untersummen . . . 65
10.2 Definition des Riemannschen Integrals . . . 67
10.3 Riemannsche Zwischensummen . . . 70
10.4 Eigenschaften des Riemannschen Integrals . . . 72
10.5 Integration über Teilintervalle . . . 74
10.6 Integrationstechniken . . . 75
10.7 Integration rationaler Funktionen . . . 78
10.8 Taylor-Reihe, Taylor-Polynom . . . 79
10.9 Vertauschung von Integration/Differentiation mit Limesbildung . . . 81
10.10 Uneigentliche Integrale . . . 83

1 Mengen, Funktionen, reelle Zahlen

1.1 Mengen

Es ist nicht einfach, den Begriff **Menge** zu definieren. Wir benutzen die folgende (naive) Vorstellung von Mengen:

> *Eine Menge ist eine Zusammenfassung unterschiedlicher Objekte (Elemente) zu einem Ganzen.*

Schreibweisen

$x \in A$ (Element x gehört zu A)

$x \notin A$ (Element x gehört nicht zu A)

$A \subset B$ (A ist Teilmenge von B, d.h. für jedes $x \in A$ gilt auch $x \in B$)

$\emptyset$ leere Menge, für jede Menge A gilt $\emptyset \subset A$

$A \cup B = \{x : \ x \in A \text{ oder } x \in B\}$ (Vereinigung)

$A \cap B = \{x : \ x \in A \text{ und } x \in B\}$ (Durchschnitt)

$A \setminus B = \{x : \ x \in A \text{ und } x \notin B\}$ (Differenz)

$P(A) = \{M : \ M \subset A\}$ (Potenzmenge von A)

$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ Menge aller geordneten Paare (a, b)

1.2 Funktionen

Definition 1.1 *X, Y seien Mengen. Eine Funktion (Abbildung) f von X nach Y ordnet jedem $x \in X$ eindeutig ein $y \in Y$ zu.*

Schreibweise: $f : \begin{cases} X & \to & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$ *oder* $f : X \to Y$

Die Menge

$$\operatorname{graph} f := \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

ist eine Teilmenge von $X \times Y$ und heißt Graph der Funktion f.

Merke:

- Eine Funktion besteht aus drei „Objekten“
  - X Definitionsbereich (Definitionsmenge)
  - Y Wertebereich
  - $x \mapsto f(x)$ Abbildungsvorschrift

  Um also unmissverständlich von einer „Funktion“ zu sprechen, muss man deren Definitionsbereich, Wertebereich und Abbildungsvorschrift angeben. Sind diese drei „Objekte“ eindeutig und unmissverständlich festgelegt, so kann man zu der Funktion $f : X \to Y$ auch einfach f sagen.

- zwei Funktionen $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ heißen gleich, falls gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$.

Bezeichnungen

Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion.

- Sei $A \subset X$. Dann heißt $f(A) = \{f(x) \in Y : x \in A\}$ Bild von A.
- Sei $B \subset Y$. Dann heißt $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ Urbild von B.
- die Funktion $f : X \to Y$ heißt
  - **injektiv**, wenn gilt: aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$.

    (alternativ: aus $x_1 \neq x_2$ folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$)
  - **surjektiv**, wenn gilt: $f(X) = Y$.
  - **bijektiv**, falls f surjektiv und injektiv ist.

Umkehrfunktion

Sei $f : X \to Y$ bijektiv. Dann gibt es zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Die Funktion

$$g : \begin{cases} Y & \to & X \\ y & \mapsto & x \quad \text{mit } y = f(x) \end{cases}$$

heißt Umkehrfunktion von f und wird mit $f^{-1} : Y \to X$ bezeichnet.

Komposition

$f : X \to Y$ und $g : W \to Z$ seien Funktionen mit $f(X) \subset W$. Die Funktion

$$h : \begin{cases} X & \to & Z \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{cases}$$

heißt Komposition von f und g. Sie wird bezeichnet mit: $h = g \circ f$.

Identitätsabbildung

Die Funktion

$$\mathrm{id}_X : \begin{cases} X & \to & X \\ x & \mapsto & x \end{cases}$$

heißt Identitätsabbildung (Identitätsfunktion, identische Abbildung).

Ist $f : X \to Y$ bijektiv, so gilt $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$

1.3 Reelle Zahlen

Wir betrachten nun eine Menge $\mathbb{R}$, die wir die Menge der reellen Zahlen nennen werden. Die Existenz dieser Menge wird nicht bewiesen, sondern es wird vorausgesetzt, dass es eine Menge $\mathbb{R}$ gibt, welche den folgenden 13 Axiomen (A1)-(A13) genügt.

Körperaxiome (A1)-(A9)

Es gibt Operationen $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{R}$, die zwei Elementen $a, b \in \mathbb{R}$ ein Element $a + b \in \mathbb{R}$ bzw. $a \cdot b \in \mathbb{R}$ zuordnen mit folgenden Eigenschaften:

(A1)	$(a + b) + c = a + (b + c)$	(Assoziativität)
(A2)	$a + b = b + a$	(Kommutativität)
(A3)	es gibt $0 \in \mathbb{R}$ mit $a + 0 = a$	(neutrales Element bzgl. $+$)
(A4)	zu $a \in \mathbb{R}$ gibt es $(-a) \in \mathbb{R}: \quad a + (-a) = 0$	(Inverses Element bzgl. $+$)
(A5)	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	(Assoziativität)
(A6)	$a \cdot b = b \cdot a$	(Kommutativität)
(A7)	es gibt $1 \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot 1 = a$	(neutrales Element bzgl. $\cdot$)
(A8)	zu $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es $a^{-1} \in \mathbb{R}: \quad a \cdot a^{-1} = 1$	(Inverses Element bzgl. $\cdot$)
(A9)	$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$	(Distributivität)

Konventionen:

Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei $a - b := a + (-b)$.

Für $a \neq 0$ sei $\frac{1}{a} := a^{-1}$ und $\frac{b}{a} := a^{-1} \cdot b$.

$(a \cdot b) + (a \cdot c) = a \cdot c + b \cdot c$

Anordnungsaxiome (A10)-(A12)

Es existiert eine Teilmenge $P \subset \mathbb{R}$ (die Menge der positiven reellen Zahlen) mit:

(A10) für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der folgenden Beziehungen: $-a \in P$; $a \in P$; $a = 0$

(A11) Aus $a, b \in P$ folgt $a + b \in P$.

(A12) Aus $a, b \in P$ folgt $a \cdot b \in P$.

Schreibweise

Wir schreiben $a > 0$ anstelle von $a \in P$ sowie $a > b$ (oder $b < a$) anstelle von $a - b \in P$.

Konvention

- Für $a, b \in \mathbb{R}$ bedeutet $a \leq b$, dass entweder $a = b$ oder $a < b$ gilt.
- Für $A \subset \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathbb{R}$ bedeutet:
  - $A \leq \xi$: für alle $a \in A$ gilt $a \leq \xi$
  - $A < \xi$: für alle $a \in A$ gilt $a < \xi$
  - $\xi \leq A$: für alle $a \in A$ gilt $\xi \leq a$
  - $\xi < A$: für alle $a \in A$ gilt $\xi < a$

Definition 1.2 (obere und untere Schranken) *Sei $A \subset \mathbb{R}$.*

a) ξ heißt ***obere Schranke*** *von A, falls $A \leq \xi$ gilt.*

b) ξ heißt ***untere Schranke*** *von A, falls $\xi \leq A$ gilt.*

c) A heißt nach oben beschränkt, wenn eine obere Schranke von A existiert.

d) A heißt nach unten beschränkt, wenn eine untere Schranke von A existiert.

e) A heißt beschränkt, falls A nach oben und nach unten beschränkt ist.

Definition 1.3 (Maximum, Minimum) *Sei $A \subset \mathbb{R}$.*

a) $\eta \in \mathbb{R}$ heißt Maximum von A, falls $A \leq \eta$ und $\eta \in A$.

b) $\eta \in \mathbb{R}$ heißt Minimum von A, falls $\eta \leq A$ und $\eta \in A$.

Bezeichnung: $\max A$ bzw. $\min A$

Definition 1.4 (Supremum, Infimum) *Sei $A \subset \mathbb{R}$.*

a) $\eta \in \mathbb{R}$ heißt Supremum (kleinste obere Schranke) von A, falls gilt:

  i) $A \leq \eta$

  ii) aus $A \leq \xi$ folgt $\eta \leq \xi$

b) $\eta \in \mathbb{R}$ heißt Infimum (größte untere Schranke) von A, falls gilt:

  i) $\eta \leq A$

  ii) aus $\xi \leq A$ folgt $\xi \leq \eta$

Bezeichnung: $\sup A$ bzw. $\inf A$

Vollständigkeitsaxiom (A13)

(A13) Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum. Diese reelle Zahl wird mit $\sup A$ bezeichnet.

Betrag und Dreiecksungleichung

Für $a \in \mathbb{R}$ sei $\mid a \mid = \begin{cases} a & \text{falls} \quad a \geq 0, \\ -a & \text{falls} \quad a < 0. \end{cases}$

Rechenregeln:

i) Es gilt: $\mid a \mid = 0$ genau dann wenn $a = 0$.

ii) $\mid a \cdot b \mid = \mid a \mid \cdot \mid b \mid$

iii) $\dfrac{\mid a \mid}{\mid b \mid} = \left|\dfrac{a}{b}\right|$, falls $b \neq 0$.

iv) $\mid a + b \mid \leq \mid a \mid + \mid b \mid$ (Dreiecksungleichung)

v) $\Big| \mid a \mid - \mid b \mid \Big| \leq \mid a + b \mid$ (Umgekehrte Dreiecksungleichung)

Intervalle

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

$$\begin{aligned}
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \text{ heißt offenes Intervall} \\
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \text{ heißt abgeschlossenes Intervall} \\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\
[a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\
(-\infty,a] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \\
(a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\
(-\infty,a) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \\
(-\infty,\infty) &:= \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^- := (-\infty,0), \quad \mathbb{R}^+ := (0,\infty) \\
\text{Für } \epsilon > 0 \text{ heißt } B_\epsilon(a) &:= (a-\epsilon, a+\epsilon) \epsilon\text{-Umgebung von } a.
\end{aligned}$$

Mengensysteme

Eine Menge $\mathfrak{M}$ heißt Mengensystem, wenn die Elemente von $\mathfrak{M}$ selbst wieder Mengen sind.

Sei $\mathfrak{M}$ ein Mengensystem:

$$\bigcap_{B \in \mathfrak{M}} B := \{x : x \in B \text{ für jedes } B \in \mathfrak{M}\}$$

$$\bigcup_{B \in \mathfrak{M}} B := \{x : x \in B \text{ für mindestens ein } B \in \mathfrak{M}\}$$

2 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

2.1 Natürliche Zahlen

Definition 2.1 *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt induktive Menge, falls gilt:*

a) $1 \in M$

b) aus $x \in M$ folgt $x + 1 \in M$

Definition 2.2 *Sei $\mathfrak{M} := \{M \subset \mathbb{R}$: M ist induktiv$\}$. Dann heißt*

$$\mathbb{N} := \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M$$

die Menge der natürlichen Zahlen.

Lemma 2.3 $\mathbb{N}$ *ist eine induktive Menge.*

Lemma 2.4 $\mathbb{N}$ *ist die kleinste induktive Menge. Das bedeutet: ist M irgendeine induktive Menge und $M \subset \mathbb{N}$, so folgt $M = \mathbb{N}$.*

Die Aussage des Lemmas heißt auch Induktionsprinzip. Wir erklären seine Bedeutung im folgenden Abschnitt.

2.2 Beweise durch vollständige Induktion

$A(n)$ sei eine Aussageform mit Wahrheitsgehalt richtig oder falsch in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$. Um zu beweisen, dass $A(n)$ wahr ist für alle $n \in \mathbb{N}$, geht man wie folgt vor:

a) Beweise, dass $A(1)$ wahr ist.

b) Unter der Annahme, dass $A(n)$ wahr ist für ein $n \in \mathbb{N}$, beweise die Wahrheit von $A(n+1)$.

Damit ist $M = \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\}$ eine induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$. Mit Lemma 2.4 gilt daher $M = \mathbb{N}$. Wir halten damit fest:

> *Das Beweisprinzip durch vollständige Induktion ist eine Eigenschaft der natürlichen Zahlen.*

Variante der vollständigen Induktion

a)' Beweise, dass $A(n_0)$ wahr ist für ein $n_0 \in \mathbb{N}$.

b)' Unter der Annahme, dass $A(n)$ wahr ist für ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, beweise die Wahrheit von $A(n+1)$.

Damit folgt, dass $A(n)$ wahr ist für alle natürlichen $n \geq n_0$.

Beispiel: Bernoullische Ungleichung (Jacob Bernoulli, 1689)

Für $x \geq -1,\ n \in \mathbb{N}$ gilt:	$(1+x)^n$	$\geq$	$1 + n \cdot x$
Für $x > -1,\ x \neq 0,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt:	$(1+x)^n$	$>$	$1 + n \cdot x$

2.3 Beziehung zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$

Lemma 2.5 *$\mathbb{N}$ ist nach oben unbeschränkt.*

Korollar 2.6

(i) Seien $a, b \in (0, \infty)$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot a > b$.

(ii) Sei $a \in (0, \infty)$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < a < n$.

Lemma 2.7 *Sei $M \subset \mathbb{N}, M \neq \emptyset$. Dann besitzt M ein Minimum.*

2.4 Ganze Zahlen, rationale Zahlen

Mit $-\mathbb{N}$ bezeichnen wir die Menge $\{-n : n \in \mathbb{N}\}$. Desweiteren sei

$\mathbb{N}_0$	$:= \mathbb{N} \cup \{0\}$	die Menge der natürlichen Zahlen vereinigt mit 0
$\mathbb{Z}$	$:= \mathbb{N} \cup -\mathbb{N} \cup \{0\}$	die Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	$:= \{x = \dfrac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$	die Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{Q}$ erfüllt (A1)-(A12), aber nicht (A13).

2.5 Endliche Mengen, abzählbare Mengen

Definition 2.8 *Zwei Mengen heißen gleichmächtig, falls eine bijektive Abbildung* $\varphi : A \to B$ *existiert.*

Definition 2.9 *Sei* A *eine Menge.*

a) A *heißt endlich, falls* $n \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass* A *und* $\{1, 2, ..., n\}$ *gleichmächtig sind. Schreibweise:* $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\} = \{a_k : k = 1, ..., n\}$

b) A *heißt unendlich, falls* A *nicht endlich ist.*

c) A *heißt abzählbar, falls* A *und* $\mathbb{N}$ *gleichmächtig sind. Schreibweise:* $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$

d) A *heißt höchstens abzählbar, falls* A *endlich oder abzählbar ist. Schreibweise:* $A = \{a_k\}$

e) A *heißt überabzählbar, falls* A *nicht höchstens abzählbar ist.*

Satz 2.10

a) A *sei abzählbar und* $B \subset A$*. Dann ist* B *höchstens abzählbar.*

b) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *ist abzählbar.*

c) $\mathfrak{M} = \{A_k\}$ *sei ein höchstens abzählbares Mengensystem, wobei jedes Element* A_k *höchstens abzählbar sei. Dann ist* $\bigcup\limits_{A_k \in \mathfrak{M}} A_k$ *höchstens abzählbar.*

Korollar 2.11 $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar.*

Proposition 2.12 *Für jedes* $k \in \mathbb{N}$ *sei* $I_k := [a_k, b_k]$ *ein abgeschlossenes Intervall mit* $a_k < b_k$ *und es gelte* $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset ...$ *d.h.* $I_k \supset I_{k+1}$*. Dann ist*

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k \neq \emptyset.$$

Satz 2.13 $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.*

Bemerkung

Ein ähnliche Vorgehensweise wie im Beweis von Satz 2.13 zeigt, dass jedes nichtleere Intervall $I \subset \mathbb{R}$ überabzählbar ist.

2.6 Summen- und Produktzeichen

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + ... + a_n, \qquad \prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$$

Eigenschaften

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i + \mu \sum_{i=1}^{n} b_i$

b) Es sei $a_i \leq b_i$ für $i = 1, ..., n$. Dann gilt $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} b_i$.

c) Es sei $0 \leq a_i \leq b_i$ für $i = 1, ..., n$. Dann gilt $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i \leq \prod_{i=1}^{n} b_i$.

d) $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \mid a_i \mid$

2.7 Binomialkoeffizienten

Pascalsches Dreieck

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0: & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1: & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2: & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3: & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4: & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5: & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

... usw.

Bezeichnung: die Zahlen der n-ten Zeile heißen der Reihe nach $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, ..., \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$

Definition 2.14 *Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei*

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} := 1 \quad \textit{sowie} \quad \binom{n+1}{k} := \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \textit{ für } k = 1, \dots, n.$$

Das Symbol $\binom{n}{k}$ heißt Binomialkoeffizient. Sprich: n über k.

Potenzen

Im folgenden benötigen wir ganzzahlige Potenzen reeller Zahlen. Für $a \in \mathbb{R}$ sei

$$a^0 := 1$$

und gemäß vollständiger Induktion definieren wir

$$a^{n+1} := a \cdot a^n \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Ist $a \neq 0$ so definieren wir $a^{-n} := \left(a^{-1}\right)^n$. Es gelten die üblichen Potenzgesetze

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n, \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

Satz 2.15 (Binomischer Satz) *Seien $a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i \cdot b^{n-i}.$$

Fakultäten

$$0! := 1, \qquad \underbrace{n!}_{n\text{-Fakultät}} := n \cdot (n-1)! \quad, n \in \mathbb{N}$$

Satz 2.16 $\displaystyle \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$

Ergänzung

a) $\binom{n}{k} := 0$*, falls $n < k$.*

b) $\binom{n}{k}$ *= Anzahl der unterschiedlichen k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Grundmenge.*

3 Polynome und n-te Wurzeln

Definition 3.1 *$f, g : D \to \mathbb{R}$ seien Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind:*

$$\lambda \cdot f : \begin{cases} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \cdot f(x) \end{cases} \qquad f+g : \begin{cases} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{cases} \qquad f \cdot g : \begin{cases} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \cdot g(x) \end{cases}$$

ebenfalls Funktionen. Analog definiert man punktweise $|f|$, $\max\{f,g\}$ und $\min\{f,g\}$.

Definition 3.2 *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt*

a) nach oben beschränkt, falls $K \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) \leq K \quad \forall x \in D$.

b) nach unten beschränkt, falls $K \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) \geq K \quad \forall x \in D$.

c) beschränkt, falls $K \in \mathbb{R}$ existiert mit $\mid f(x) \mid \leq \ K \quad \forall x \in D$.

Schreibweise

$\sup f(D) =: \sup_D f \ \ (= \sup\limits_{x \in D} f(x))$

$\inf f(D) =: \inf_D f \ \ (= \inf\limits_{x \in D} f(x))$

Ist f nach oben bzw. unten unbeschränkt, so definiere $\sup_D f = \infty$ bzw. $\inf_D f = -\infty$.

3.1 Polynome

Definition 3.3 *Ein Polynom ist eine Funktion $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$. Dabei ist $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ heißen Koeffizienten von P. Falls $a_n \neq 0$, dann heißt P Polynom vom Grad n.*

Eigenschaften

Sind P, Q Polynome und $\lambda \in \mathbb{R}$, so sind $\lambda \cdot P$, $P+Q$ und $P \cdot Q$ ebenfalls Polynome.

Satz 3.4 *$P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ sei ein Polynom, $\xi \in \mathbb{R}$ fest. Dann gilt $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i (x-\xi)^i$ mit $b_k = \sum\limits_{i=k}^{n} a_i \binom{i}{k} \xi^{i-k}$ für $k = 0, \ldots, n$.*

Korollar 3.5 *Sei P Polynom vom Grad n und $P(\xi) = 0$ für ein $\xi \in \mathbb{R}$. Dann existiert ein Polynom Q von Grad $n-1$ mit $P(x) = (x - \xi) \cdot Q(x)$.*

Satz 3.6 (Nullstellensatz / Identitätssatz für Polynome)

a) P sei Polynom vom Grad $n \geq 1$. Dann hat P höchstens n Nullstellen.

b) P, Q seien Polynome vom Grad $\leq n$. Falls P und Q an $n+1$ Stellen übereinstimmen so folgt $P = Q$.

Vielfachheit von Polynomnullstellen

Sei P Polynom vom Grad n. Nach Abspaltung aller (reellen) Nullstellen hat P die Darstellung

$$P(x) = (x - \xi_1) \cdot (x - \xi_2) \cdot \ldots \cdot (x - \xi_k) \cdot Q_k(x)$$

und $\text{Grad}(Q_k) = n - k$, Q_k hat keine (reellen) Nullstellen. Nun schreiben wir die Nullstellen neu auf. Es seien

$$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\} = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\},$$

wobei $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ gelte. D.h. die $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ sind die *unterschiedlichen* Nullstellen von P. Dann hat P die Darstellung

$$P(x) = (x - \lambda_1)^{s_1} \cdot (x - \lambda_2)^{s_2} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_l)^{s_l} \cdot Q_k(x)$$

Für $i = 1, \ldots, l$ heißt s_i Vielfachheit der Nullstelle λ_i. Es gilt $s_1 + \ldots + s_l = k$.

Ergänzung (Fundamentalsatz der Algebra)
In der obigen Darstellung bleibt u.U. ein Polynom $Q_k(x)$ übrig mit $\text{Grad}(Q_k) = n - k \geq 2$, welches keine reelle Nullstelle mehr hat. In diesem Fall sind dennoch Aussagen möglich. Ein Satz von weitreichender Bedeutung ist der sogenannte Fundamentalsatz der Algebra. Mit unseren jetzigen Mitteln können wir ihn nicht beweisen. Es besagt:

Ein Polynom vom Grad n hat genau n komplexe Nullstellen.

Besonders elegante Beweise sind mit Hilfe der *Funktionentheorie* bzw. der *komplexen Analysis* möglich.

3.2 Monotone Funktionen

Definition 3.7 *Es sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt:*

a) monoton wachsend, wenn aus $x < y$, $x, y \in D$ folgt $f(x) \leq f(y)$.

b) streng monoton wachsend, wenn aus $x < y$, $x, y \in D$ folgt $f(x) < f(y)$.

c) monoton fallend, wenn aus $x < y$, $x, y \in D$ folgt $f(x) \geq f(y)$.

d) streng monoton fallend, wenn aus $x < y$, $x, y \in D$ folgt $f(x) > f(y)$.

Satz 3.8

(1) Die Funktionen $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien monoton wachsend. Dann gilt:

(i) $f + g$ und $\lambda \cdot f$ (falls $\lambda > 0$ ist) sind monoton wachsend.

(ii) Sind f und g zusätzlich positiv, so ist $f \cdot g$ monoton wachsend und $\frac{1}{f}$ monoton fallend.

(2) Für $n \in \mathbb{N}$ ist x^n streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$; x^{-n} ist streng monoton fallend auf $(0, \infty)$.

3.3 Die Lipschitz-Bedingung

Definition 3.9 *Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genügt einer Lipschitz-Bedingung auf D, falls eine Konstante $L > 0$ existiert, sodass gilt*

$$| f(x) - f(y) | \leq \; L \, | x - y | \quad \forall x, y \in D.$$

Wir sagen kurz: $f \in$ Lip(D); L heißt Lipschitz-Konstante von f auf D.

Lemma 3.10

a) Falls $f, g \in$ Lip(D) und $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow f + g, \lambda \cdot f \in$ Lip(D)

b) D beschränkt, $f \in$ Lip(D) $\Rightarrow f$ beschränkt.

c) D beschränkt, $f, g \in$ Lip(D) $\Rightarrow f \cdot g \in$ Lip(D).

d) D beschränkt, P Polynom $\Rightarrow P \in$ Lip(D).

Satz 3.11 (Vorläufige Version des Satzes über die Umkehrfunktion)

Voraussetzung:

Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und für jedes Intervall $[a,b] \subset I$ gelte $f \in Lip([a,b])$.

Behauptung:

i) $I^* = f(I)$ *ist ein Intervall*

ii) $f : I \to I^*$ *ist bijektiv*

iii) $f^{-1} : I^* \to I$ *ist streng monoton wachsend*

Beispiel: $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Die Funktion

$$f : \begin{cases} [0,\infty) & \to & [0,\infty) \\ x & \mapsto & x^n \end{cases}$$

ist nach Satz 3.8(2) streng monoton wachsend und $f \in Lip([0,k])$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Nach Satz 3.11 gibt es eine streng monoton wachsende Umkehrfunktion $f^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty)$. Bezeichnung: $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$. Damit ist die n-te Wurzel der Zahl x gemeint.

Achtung: die n-te Wurzel ist immer ≥ 0

$$\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}, \qquad \sqrt{a^2} = |\, a \,|$$
$$\sqrt{4} = 2 \quad (\sqrt{4} = -2 \quad \text{oder } \sqrt{4} = \pm 2 \text{ ist falsch!})$$

Satz 3.12 (Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel) *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ gegebene reelle Zahlen. Dann gilt:*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

und "=" gilt genau dann, wenn $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Definition 3.13 (Potenzen mit rationalem Exponenten)

Sei $r = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Für $a \in (0,\infty)$ definiere $a^r := \sqrt[q]{a^p}$ und $a^0 := 1$.

Bemerkung (Wohldefiniertheit der Potenz mit rationalem Exponenten)

Sei $r = \frac{p}{q} = \frac{n \cdot p}{n \cdot q}$ und sei $\xi = \sqrt[q]{a^p}$ sowie $\eta = \sqrt[n \cdot q]{a^{n \cdot p}}$. Gilt dann $\eta = \xi$? Ja, denn man beachte: $\xi^q = a^p, \xi^{n \cdot q} = a^{n \cdot p} = \eta^{n \cdot q}$ also $\xi = \eta$.

Satz 3.14 *Seien $a, b \in (0, \infty)$, $r, s \in \mathbb{Q}$. Dann gilt:*

a) $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$

b) $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$

c) $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

d) Die Funktion $x \mapsto x^r$ ist auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend für $r > 0$ und auf $(0, \infty)$ streng monoton fallend für $r < 0$.

e) Sei $r < s$. Für $a > 1$ gilt $a^r < a^s$ und für $0 < a < 1$ gilt $a^r > a^s$.

4 Zahlenfolgen, Konvergenz, Exponentialfunktion, Logarithmus und allgemeine Potenzfunktion

4.1 Zahlenfolgen und Konvergenz

Definition 4.1

Sei $p \in \mathbb{Z}$ und $Z_p := \{n \in \mathbb{Z} : n \geq p\}$. Eine Abbildung $a : Z_p \to \mathbb{R}$ heißt reelle Zahlenfolge.

Schreibweise: das n-te Folgenglied wird mit $a_n := a(n)$ bezeichnet, die gesamte Folge mit $(a_n)_{n \geq p}$ oder (a_n).

Übertragung der Begriffe aus Definition 3.2 (Beschränktheit) und Definition 3.7 (Montonie) auf Folgen:

Die Folge (a_n) heißt beschränkt, falls $c \geq 0$ existiert mit $|a_n| \leq c$ für alle $n \geq p$.

Die Folge (a_n) heißt monoton wachsend, falls gilt $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \geq p$.

In ähnlicher Weise spricht man von *nach oben beschränkten/nach unten beschränkten* Folgen sowie von *monoton fallenden/streng monoton wachsenden/streng monoton fallenden* Folgen.

Definition 4.2 (Nullfolge) *Eine Folge (a_n) heißt Nullfolge, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass gilt:*

$$\text{aus } n \geq N \text{ folgt } |a_n| \leq \epsilon.$$

Schreibweisen:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0, \quad a_n \to 0$ für $n \to \infty, \quad a_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ oder einfach nur $a_n \to 0$

Lemma 4.3

a) Ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge, so ist $(a_n \cdot b_n)$ eine Nullfolge.

b) Falls $a_n \to 0$ und falls $c > 0$ existiert mit $|b_n| \leq c|a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann folgt $b_n \to 0$.

c) Aus $a_n \to 0$ und $b_n \to 0$ folgt $a_n + b_n \to 0$.

Beispiele von Nullfolgen

a) Falls $a_n \to 0$ und $p \in \mathbb{N}$ so folgt $\sqrt[p]{|a_n|} \to 0$.

b) Sei $p \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{n}} = 0$.

c) Für $0 < |q| < 1$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

d) Für $0 < |q| < 1$ und $p \in \mathbb{N}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} n^p q^n = 0$.

Definition 4.4

Eine Folge (a_n) heißt konvergent, falls $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $(a_n - a)$ Nullfolge ist. a heißt Grenzwert von (a_n). Eine Folge (a_n) heißt divergent, falls (a_n) nicht konvergiert.

Schreibweise

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \quad a_n \to a$ für $n \to \infty, \quad a_n \stackrel{n\to\infty}{\to} a$ oder einfach nur $a_n \to a$

Gleichbedeutend zur Definition 4.4:

Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein Index $N \in \mathbb{N}$, sodass gilt: $n \geq N \Rightarrow |a_n - a| \leq \epsilon$.

Beispiele von konvergenten Folgen

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+a}{n+b} = 1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Satz 4.5 *Sei (a_n) konvergent. Dann gilt:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ist eindeutig bestimmt.

b) (a_n) ist beschränkt.

Satz 4.6 *Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $f \in Lip([c,d])$ mit $a \in (c,d)$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.*

Lemma 4.7 *Es gelte* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Dann folgt:*

a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$, $\quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$, $\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, *falls* $b \neq 0$,

b) $\lim_{n\to\infty}|a_n| = |a|$, $\quad \lim_{n\to\infty}(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a$, $\quad \lim_{n\to\infty} a_n^p = a^p$ *für* $p \in \mathbb{N}$,

c) Falls ein $N \in \mathbb{N}$ *existiert mit* $a_n \leq b_n$ *für alle* $n \geq N$, *so folgt* $a \leq b$.

Folgerung

Ist P Polynom und $a_n \overset{n\to\infty}{\to} a$, so folgt $P(a_n) \overset{n\to\infty}{\to} P(a)$.

Satz 4.8 (Sandwich-Theorem) *Falls* $a_n \to a$, $b_n \to a$ *für* $n \to \infty$ *und falls* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt, so folgt, dass* $c_n \to a$ *für* $n \to \infty$.

Beispiele

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 4n^2 + 7}{2n^3 + 5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{4}{n} + \frac{7}{n^3}}{2 + \frac{5}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 3 - \frac{4}{n} + \frac{7}{n^3}}{\lim_{n\to\infty} 2 + \frac{5}{n^2}} = \frac{3}{2}$

c) Sei $a > 0$. Dann gilt: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

1. Fall Es sei $a > 1$. Dann gilt $1 < a < n$ für große n, also: $1 = \sqrt[n]{1} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$ und mit dem Sandwich-Theorem folgt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

2. Fall Es sei $0 < a < 1$. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$. Mit Lemma 4.7a folgt: $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \to 1$.

Definition 4.9 (Teilfolgen, Umordnungen)

Sei $(a_n)_{n\geq p}$ *eine Folge,* $Z_p = \{z \in \mathbb{Z},\ z \geq p\}$ *und sei* $\Phi : Z_p \to Z_p$ *eine Abbildung. Durch* $b_n := a_{\Phi(n)}$ *für* $n \in Z_p$ *wird eine neue Folge* $(b_n)_{n\geq p}$ *definiert.*

a) Ist Φ *bijektiv, so heißt* (b_n) *Umordnung von* (a_n).

b) Ist Φ *streng wachsend, so heißt* (b_n) *Teilfolge von* (a_n).

Beispiel

$a_n = \frac{1}{n}$. Dann sind $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ und $\left(\frac{1}{2n}\right)$ Teilfolgen von (a_n).

Satz 4.10 *Sei* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. *Jede Umordnung und jede Teilfolge von* (a_n) *konvergiert auch gegen* a.

Definition 4.11 (Bestimmte Divergenz) *Eine Folge* $(a_n)_{n\geq p}$ *heißt bestimmt divergent gegen* ∞ *(bzw.* $-\infty$*), falls zu jedem* $K > 0$ *ein Index* $N \in Z_p$ *existiert, sodass gilt:*

$$n \geq N \Rightarrow a_n > K \qquad (\textit{bzw. } a_n < -K).$$

Schreibweise

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad a_n \overset{n\to\infty}{\to} \infty$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty, \quad a_n \overset{n\to\infty}{\to} -\infty$

Satz 4.12 (Monotone Konvergenz) *Sei* $(a_n)_{n\geq p}$ *eine monoton wachsende und beschränkte Folge. Dann ist* $(a_n)_{n\geq p}$ *konvergent und es gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geq p} a_n.$$

Schreibweise: $a_n \nearrow a$

Analog: Sei $(a_n)_{n\geq p}$ eine monoton fallende und beschränkte Folge. Dann ist $(a_n)_{n\geq p}$ konvergent und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\geq p} a_n.$$

4.2 Exponentialfunktion, Logarithmus und allgemeine Potenzfunktion

Ziel: In diesem Abschnitt geben wir eine Definition von a^x für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$.

Idee: Wähle eine Folge $(r_n)_{n\geq 1}$, r_n rational mit $r_n \to x$ und untersuche die Folge $(a^{r_n})_{n\geq 1}$. Es stellt sich heraus, dass $(a^{r_n})_{n\geq 1}$ konvergiert, und dass der Grenzwert unabhängig davon ist, welche Folge rationaler Zahlen gewählt wurde (sofern sie nur gegen x konvergiert). Dies wird (wie wir zeigen werden) die Definition rechtfertigen:

$$a^x := \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

Lemma 4.13 *Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine monoton wachsende Folge $(r_n)_{n\geq 1}$ von rationalen Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$.*

Lemma 4.14 *Sei $a > 0, m \in \mathbb{N}$ und $J = [-m, m]$. Dann existiert $L_m > 0$ mit der Eigenschaft:*

$$\textit{Für alle } r, s \in J \cap \mathbb{Q} \textit{ gilt: } |a^r - a^s| \leq L_m |r - s|.$$

Bemerkung: Besagt Lemma 4.14, dass die Funktion $x \mapsto a^x$ auf $[-m, m]$ einer Lipschitz-Bedingung genügt? Fast – aber nicht ganz. Denn bisher ist a^x nur für rationale Zahlen definiert. Dennoch ist Lemma 4.14 der Vorläufer für die Aussage: $x \mapsto a^x$ erfüllt auf $[-m, m]$ eine Lipschitz-Bedingung, vgl. Satz 4.16a)ii).

Nun haben wir alle Mittel zur Verfügung, um für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ den Ausdruck a^x definieren zu können:

Satz 4.15 *Sei $a > 0, x \in \mathbb{R}$ und $(r_n)_{n\geq 1}$ eine Folge rationaler Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$. Dann existiert $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ und ist unabhängig von der Wahl der Folge $(r_n)_{n\geq 1}$. Definiere $a^x := \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$.*

Satz 4.16 (Eigenschaften von a^x)

a) Sei $a > 0$. Die Funktion $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a^x \end{array}\right.$ heißt allgemeine Exponentialfunktion. Es gilt:

- *i) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad (a^x)^y = a^{x\cdot y}, \quad (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$*
- *ii) Die allgemeine Exponentialfunktion gehört zu $Lip([-m, m])$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt: aus $x_n \to x$ folgt $a^{x_n} \to a^x$.*
- *iii) für $a > 1$ ist a^x streng monoton wachsend.*
- *iv) für $0 < a < 1$ ist a^x streng monoton fallend.*

b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Funktion $\left\{\begin{array}{ccc} (0, \infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha \end{array}\right.$ heißt allgemeine Potenzfunktion.
Für $\alpha > 0$ definiert man $0^\alpha := 0$. Für $\alpha > 0$ ist $x \mapsto x^\alpha$ streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$ und für $\alpha < 0$ streng monoton fallend auf $(0, \infty)$.

Bemerkung: Man beachte

- $x^0 = 1$ für $x \in \mathbb{R}$. Dies ist nützlich z.B. um Polynome $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ aufzuschreiben.
- $0^\alpha = 0$ für $\alpha > 0$. Dies ist (wie gleich sehen werden, s.u.) eine natürliche Fortsetzung der Funktion $x \mapsto x^\alpha$ von $(0, \infty)$ auf $[0, \infty)$. Für $\alpha < 0$ gibt es keine solche natürliche Fortsetzung.

Konstruktion der Logarithmus-Funktion

Betrachte für $a > 1$ nochmals die Funktion $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a^x \end{array} \right.$

f ist streng monoton wachsend, $f \in Lip(I)$ für jedes beschränkte Intervall I. Nach Satz 3.11 (Satz über die Umkehrfunktion) ist $f(\mathbb{R})$ ein Intervall.

Wir bestimmen nun den Bildbereich $f(\mathbb{R})$: Sei $a = 1 + h$, $h > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$a^n = (1+h)^n \geq 1 + n \cdot h \text{ und } a^{-n} \leq \frac{1}{1 + n \cdot h}.$$

Folglich gilt $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} a^{-n} = 0$, also $f(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

In ähnlicher Art und Weise kann man zeigen, dass der Bildbereich von x^α für $x \in (0, \infty)$ genau das Interval $(0, \infty)$ ist.

Definition 4.17 *Es sei $a > 1$ und $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & (0, \infty) \\ x & \mapsto & a^x \end{array} \right.$. Die Umkehrfunktion f^{-1} heißt $\log_a x$ (Logarithmus von x zur Basis a). Es gilt: $f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} (0, \infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \log_a x \end{array} \right.$ ist streng monoton wachsend.*

Es gelten die Rechenregeln (vgl. Satz 4.16):

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$, $\quad \log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$, $\quad \log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$, $\quad \log_a 1 = 0$

Die Eulersche Zahl e: Sei $x \geq -n,\ x \neq 0$. Nach der Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel gilt:

$$\Big[1 \cdot \underbrace{\Big(1+\frac{x}{n}) \cdot \ldots \cdot (1+\frac{x}{n}\Big)}_{n-\text{mal}}\Big]^{\frac{1}{n+1}} \;<\; \frac{n+1+x}{n+1}$$

Daraus folgt:

$$\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n < \Big(1+\frac{x}{n+1}\Big)^{n+1},$$

und daraus ziehen wie einige **Folgerungen:**

i) $a_n = \Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n$ ist monoton wachsend in n

ii) $b_n = \Big(1-\dfrac{1}{n}\Big)^n$ ist monoton wachsend in n

iii) $c_n = \dfrac{1}{b_{n+1}} = \Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)^{n+1} = \Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{n+1}$ ist monoton fallend und $a_n < c_n$.

Definition 4.18 (Eulersche Zahl) $e := \lim\limits_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n.$

Beachte: wegen $c_n = a_n \cdot \Big(1+\frac{1}{n}\Big)$ gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = e$.

4.3 Häufungswerte von Folgen, Konvergenzkriterium von Cauchy

Definition 4.19 *$a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungswert einer Folge $(a_n)_{n\geq p}$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ für unendlich viele $n \geq p$ gilt:*

$$|a_n - a| < \ \epsilon.$$

Beispiel:

$1+\frac{1}{n}$ hat den Häufungswert 1; $\quad \frac{1}{n}+(-1)^n$ hat die Häufungswerte $-1,\ 1$

Lemma 4.20 *$a \in \mathbb{R}$ ist Häufungswert von (a_n) genau dann, wenn eine Teilfolge von (a_n) mit Grenzwert a existiert.*

Satz 4.21 (Bolzano-Weierstraß)

Sei $(a_n)_{n\geq p}$ eine beschränkte Folge und H die Menge der Häufungswerte von (a_n). Dann gilt:

a) $H \neq \emptyset$

b) *H besitzt ein Maximum $a^* = \max H$ und ein Minimum $a_* = \min H$. Schreibweise:*

   $a^* =: \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ *(limes superior)* , $a_* =: \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ *(limes inferior)*

c) *Sei $\epsilon > 0$. Dann gilt:*

   $a_n > a^* + \epsilon$ *nur für endlich viele n;* $a_n > a^* - \epsilon$ *für unendlich viele n.*

   $a_n < a_* - \epsilon$ *nur für endlich viele n;* $a_n < a_* + \epsilon$ *für unendlich viele n.*

Korollar 4.22 *(a_n) sei beschränkte Folge. Dann gilt: (a_n) konvergiert genau dann, wenn $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.*

Definition 4.23 *Eine Folge $(a_n)_{n\geq p}$ heißt Cauchy-Folge, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein Index $N \geq p$ existiert, sodass gilt:*

$$n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Satz 4.24 *(a_n) konvergiert genau dann, wenn (a_n) Cauchy-Folge ist.*

Beispiel:

Es sei $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Offenbar ist a_n monoton wachsend. Es stellt sich die Frage, ob (a_n) konvergent ist? Die Antwort ist nein, da (a_n) keine Cauchy-Folge ist. Dies sieht man wie folgt:

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{n+1} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

5 Unendliche Reihen

Definition 5.1 *Sei* $(a_n)_{n\geq p}$ *eine gegebene reelle Zahlenfolge. Für* $k \geq p$ *heißt*

$$s_k = \sum_{n=p}^{k} a_n = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_k$$

k*-te Teilsumme. Die Folge der Teilsummen* $(s_k)_{k\geq p}$ *heißt unendliche Reihe mit Gliedern* a_n*. Die unendliche Reihe heißt konvergent, falls die Folge* $(s_k)_{k\geq p}$ *der Teilsummen konvergiert.*

Das Symbol $\displaystyle\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ *steht für*

- *die Folge der Teilsummen* s_k*.*
- $\lim_{k\to\infty} s_k$*, falls* s_k *konvergiert.*

Beispiele:

i) Die geometrische Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \neq 0$:

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \quad \text{(falls } x \neq 1\text{)}, \qquad s_k = k+1 \quad \text{(falls } x = 1\text{)}$$

Für $|x| < 1$ folgt $\lim_{k\to\infty} s_k = \frac{1}{1-x}$.

Für $|x| \geq 1$ folgt, dass s_k divergent ist.

Man sagt: Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert für $|x| < 1$ und hat den Wert $\dfrac{1}{1-x}$.

ii) Die harmonische Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, denn $(s_k)_{k\geq 1}$ ist keine Cauchy-Folge (vgl. letztes Beispiel Kapitel 4).

Satz 5.2 *Sei* $(a_n)_{n\geq p}$ *eine Folge. Dann gilt: die Reihen* $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=q}^{\infty} a_n$ $(q > p)$ *und* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n+p}$ *haben das gleiche Konvergenzverhalten und im Fall der Konvergenz gilt die Beziehung:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+p} = \sum_{n=p}^{\infty} a_n = a_p + \ldots + a_{q-1} + \sum_{n=q}^{\infty} a_n.$$

Folgerung: Es genügt, im Folgenden Reihen der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ zu betrachten.

Satz 5.3 *Die Reihen* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *seien konvergent und es sei* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *Dann gilt:*

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ *konvergiert und* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n + \mu \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$

b) Gilt zusätzlich $a_n \leq b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *so folgt* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.

Satz 5.4 *Die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *sei konvergent. Dann ist* $(a_n)_{n\geq 0}$ *eine Nullfolge und ebenso* $(r_n)_{n\geq 0}$, *wobei* $r_n = \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} a_i$ *die Folge der Reihenreste ist.*

5.1 Reihen mit positiven Gliedern

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Sei $s_k = \sum\limits_{n=0}^{k} a_n$. Dann gilt:

$$\begin{array}{lcl} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} & \Leftrightarrow & (s_k)_{k\geq 0} \text{ ist beschränkt} \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert gegen } \infty & \Leftrightarrow & (s_k)_{k\geq 0} \text{ ist unbeschränkt} \end{array}$$

Satz 5.5 (Majoranten-/ Minorantenkriterium)

a) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *konvergent und* $0 \leq a_n \leq c_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$. *Dann ist* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergent.*

b) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ *divergent und* $0 \leq d_n \leq a_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$. *Dann ist* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergent.*

Beispiele

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5n+2}$ ist divergent, denn $\frac{1}{5n+2} \geq \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{n+1}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ divergiert.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert. Denn für $n \geq 2$ gilt $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n \cdot (n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. Außerdem ist $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1$ (also insbesondere konvergent), da $s_k = \sum_{n=2}^{k} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{k}$

5.2 Alternierende Reihen

Definition 5.6 *Eine Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *heißt alternierend, falls stets* $(-1)^n \cdot a_n \geq 0$ *oder* ≤ 0 *ist für alle* $n \in \mathbb{N}_0$.

Satz 5.7 (Leibnizkriterium)

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *sei alternierend und* $(|a_n|)_{n \geq 0}$ *sei eine streng monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Beispiele

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log_a n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{konvergieren.}$$

5.3 Konvergenzkriterien

Satz 5.8 (Cauchykriterium für Reihen)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergiert* $\Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}$, *sodass gilt: aus* $k > l \geq N$ *folgt* $\left| \sum_{n=l+1}^{k} a_n \right| < \epsilon$.

Definition 5.9 (absolute Konvergenz)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *heißt absolut konvergent, falls* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ *konvergiert.*

Beispiele

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ ist absolut konvergent.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ist nicht absolut konvergent, aber konvergent.

Satz 5.10 *Falls die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergeirt, so konvergiert* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *und es gilt:*

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

Satz 5.11 (Wurzelkriterium) *Sei* $(a_n)_{n\geq 0}$ *eine Folge. Dann gilt:*

a) Falls $q \in (0, 1)$ *und* $N \in \mathbb{N}$ *existieren mit* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ *für alle* $n \geq N$, *so ist* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

b) Falls $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ *für unendlich viele* n, *so ist* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergent.*

Satz 5.12 (Quotientenkriterium) *Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge. Dann gilt:*

a) Falls $q \in (0,1)$ und $N \in \mathbb{N}$ existieren mit den Eigenschaften $a_n \neq 0$ und $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ für alle $n \geq N$ ist, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

b) Falls $N \in \mathbb{N}$ existiert mit den Eigenschaften $a_n \neq 0$ und $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für alle $n \geq N$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

Korollar 5.13 *Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge. Dann gilt:*

a) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

b) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergent.*

c) $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

d) $\liminf\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergent.*

Beispiele

a) Für $p \in \mathbb{R}$ und $x \in (-1,1)$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} n^p \cdot x^n$ absolut konvergent. Wir verwenden das Wurzelkriterium: $\sqrt[n]{n^p|x|^n} = \sqrt[n]{n}^p|x| \overset{n\to\infty}{\to} 1^p|x| < 1$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert. Wir verwenden das Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \frac{1}{2} \text{ für } n \geq 1 \text{ denn } \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert absolut für alle $x \in \mathbb{R}$, denn mit dem Quotienkriterium gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \frac{1}{2} \text{ für } n \geq N \text{ da } \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|^{n+1} \cdot n!}{|x|^n \cdot (n+1)!} = \frac{|x|}{n+1} \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

d) Betrachte für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$:

$\alpha = 1$: divergent

$\alpha < 1$: divergent, denn $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$

$\alpha = 2$: konvergent

$\alpha > 2$ konvergent, denn $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$

Was passiert für $1 < \alpha < 2$?

Satz 5.14 (Verdichtungssatz von Cauchy)

Die Folge (a_n) sei monoton fallend und $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konvergent} \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}}_{\textit{verdichtete Reihe}} \quad \textit{konvergent}$$

Beispiel

Betrachte die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ mit $\alpha > 1$. Es ist $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ und $a_{2^n} = \frac{1}{2^{\alpha \cdot n}}$ sowie

$$2^n \cdot a_{2^n} = 2^{(1-\alpha)\cdot n} = q^n$$

mit $q = 2^{1-\alpha} < 1$, da $\alpha > 1$.

D.h. die "verdichtete Reihe" $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ ist eine geometrische Reihe, die wegen $0 < q < 1$ konvergiert. Satz 5.14 besagt, dass dann auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert für $1 < \alpha < \infty$.

Definition 5.15 (Umordnung von Reihen)

Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *eine Folge und* $\Phi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ *bijektiv. Dann heißt die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\Phi(n)}$ *eine Umordnung der Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Satz 5.16 (1. Umordnungssatz)

Falls $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergiert, so konvergiert jede Umordnung gegen den selben Wert.*

Lemma 5.17 $(a_n)_{n\geq 0}$ *sei Folge und* $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, a_n^- = \max\{-a_n, 0\}$. *Dann gilt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ ist absolut konvergent } \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+, \sum_{n=0}^{\infty} a_n^- \text{ sind konvergent}$$

Satz 5.18 (2. Umordnungssatz)

Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergent, aber nicht absolut konvergent. Zu jedem* $c \in \mathbb{R}$ *existiert eine Umordnung mit* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\Phi(n)} = c$.

5.4 Doppelreihen

Definition 5.19

a) *Eine Abbildung* $a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{R} \\ (i,j) & \mapsto & a_{ij} \end{array} \right.$ *heißt Doppelfolge.*

b) *Sei* $\Phi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ *eine Bijektion und* $(a_{ij})_{i,j\geq 0}$ *eine Doppelfolge. Die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\Phi(n)}$ *heißt Realisierung der Doppelreihe* $\sum\limits_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$.

Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\Phi(n)}$ *absolut konvergiert, so ist der Wert* $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\Phi(n)}$ *unabhängig von* Φ. *In diesem Fall heißt die Doppelreihe* $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$ *absolut konvergent und hat den Wert* S.

Satz 5.20 *Sei* $(a_{ij})_{i,j\geq 0}$ *eine Doppelfolge. Falls* $K > 0$ *existiert mit* $\sum_{i,j=0}^{m} |a_{ij}| < K$ *für alle* $m \in \mathbb{N}$, *so ist* $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$ *absolut konvergent und es gilt:*

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}\Big) = \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{k} a_{i,k-i}\Big)$$

5.5 Multiplikation von Reihen

Satz 5.21 *Falls* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *absolut konvergieren, so konvergiert die Doppelreihe* $\sum_{i,j=0}^{\infty} (a_i \cdot b_j)$ *absolut und es gilt:*

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} (a_i \cdot b_j) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big)$$

Man kann die Produktreihe auch wie folgt berechnen:

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} (a_i \cdot b_j) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_{n-i}\Big)$$

Diese Art der Summation heißt Cauchy-Produkt.

Beispiel:

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!},$$

da $(x+y)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\cdot y^{n-k}=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k\cdot y^{n-k}$

Später werden wir sehen, dass gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$. D.h. wir haben soeben $e^x\cdot e^y=e^{x+y}$ verifiziert.

6 Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit

Ziel: In diesem Abschnitt sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stets eine Funktion sowie ξ ein fester Punkt (allgemeiner: ein Häufungspunkt) des Definitionsbereichs von f. Es wird nun der Begriff des Grenzwertes $\lim\limits_{x \to \xi} f(x)$ erklärt sowie der Begriff der Stetigkeit von f im Punkt ξ.

Definition 6.1

a) *$\xi \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von D, wenn in jedem Intervall $(\xi - \epsilon, \xi + \epsilon)$, $\epsilon > 0$ unendlich viele Punkte von D liegen.*

b) *$\xi \in D$ heißt isolierter Punkt von D, wenn ξ kein Häufungspunkt von D ist. In diesem Fall existiert ein $\delta > 0$, sodass gilt $(\xi - \delta, \xi + \delta) \cap D = \{\xi\}$.*

Beispiel: Sei $D = (-1, 1) \cup \{2\}$. Dann ist 2 ein isolierter Punkt und die Menge des Häufungspunkte von D ist $[-1, 1]$.

Definition 6.2 *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\xi \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von D. Man sagt: f strebt gegen $a \in \mathbb{R}$ für $x \to \xi$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit der Eigenschaft:*

$$|x - \xi| < \delta,\ x \in D \setminus \{\xi\} \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon.$$

In Symbolen: $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = a$ oder $f(x) \to a$ für $x \to \xi$. a heißt Grenzwert der Funktion f am Punkt ξ.

Definition 6.3 *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\xi \in D$. f heißt stetig an der Stelle ξ, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit der Eigenschaft:*

$$|x - \xi| < \delta,\ x \in D \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon.$$

Bemerkungen:

a) Sei $\xi \in D$ Häufungspunkt. f ist stetig an der Stelle $\xi \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$

b) Sei $\xi \in D$ isolierter Punkt. Dann ist f automatisch stetig im Punkt ξ.

Satz 6.4 *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig an der Stelle $\xi \in D$. Falls $f(\xi) > 0$ ist, dann existieren $\delta, \eta > 0$ mit $f(x) \geq \eta > 0$ für alle $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) \cap D$.*

Definition 6.5 *$f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig auf D, falls f in jedem Punkt von D stetig ist. Man schreibt $f \in C(D)$.*

Satz 6.6 *$Lip(D) \subset C(D)$. D.h. jede Funktion, die auf D einer Lipschitz-Bedingung genügt, ist stetig auf D. Sprechweise: f ist Lipschitz-stetig.*

Beispiele:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$. Dann ist $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$, denn $x^2 \in Lip([1,3])$ und $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$. f ist stetig in allen Punkten $x \neq 2$ und unstetig bei $x = 2$.

b) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{|x|}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Dann ist f stetig auf $\mathbb{R}$; insbesondere bei $x = 0$.

Definition 6.7 (Einseitiger Limes, einseitige Stetigkeit)

a) $f : (\xi, \xi + \alpha) \to \mathbb{R}$ hat in ξ einen rechtsseitigen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit der Eigenschaft:

$$\xi < x < \xi + \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon$$

Symbol: $a = f(\xi+) = \lim\limits_{x \to \xi+} f(x)$.

Analog definiert man den linksseitigen Grenzwert: $a = f(\xi-) = \lim\limits_{x \to \xi-} f(x)$

b) $f : [\xi, \xi + \alpha) \to \mathbb{R}$ heißt rechtsseitig stetig in ξ, falls $f(\xi) = f(\xi+)$.

c) $f : (\xi - \alpha, \xi] \to \mathbb{R}$ heißt linksseitig stetig in ξ, falls $f(\xi) = f(\xi-)$.

Satz 6.8 (Folgenkriterium) *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*

a) *ξ sei Häufungspunkt von D. Dann gilt:*

   $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = a$ genau dann, wenn für jede Folge (x_n) aus $D \setminus \{\xi\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

b) *f ist stetig in $\xi \in D$ genau dann, wenn für jede Folge (x_n) aus D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi \in D$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi)$.*

Lemma 6.9 (Rechenregeln für Grenzwerte)

Seien $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ Funktionen und es existieren $A = \lim\limits_{x\to\xi} f(x)$ und $B = \lim\limits_{x\to\xi} g(x)$. Dann gilt:

a) $\lim\limits_{x\to\xi} \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot A$ *für* $\lambda \in \mathbb{R}$

b) $\lim\limits_{x\to\xi} \Big(f(x) + g(x)\Big) = A + B,\ \lim\limits_{x\to\xi} \Big(f(x) \cdot g(x)\Big) = A \cdot B$

c) *Falls $B \neq 0$, dann gilt* $\lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

d) *Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in D$, so folgt $A \leq B$.*

e) *Ist $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ für alle $x \in D$ und ist $A = B$, so folgt $\lim\limits_{x\to\xi} h(x) = A$.*

Beispiele:

a) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x-1} = n$, denn $x^n - 1 = (x-1) \cdot (1 + x + \ldots + x^{n-1})$ und $\lim\limits_{x\to 1} x^m = 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$ (vgl. Regel b) in Lemma 6.9).

b) Sei $\alpha > 0$. Dann gilt $\lim\limits_{x\to 1} x^\alpha = 1$. Wähle dazu $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \alpha < n$. Dann gilt für

$$\begin{aligned} x > 1: &\quad 1 < x^\alpha < x^n \\ 0 < x < 1: &\quad x^n < x^\alpha < 1 \end{aligned}$$

   Mit Regel e) aus Lemma 6.9 folgt $\lim\limits_{x\to 1} x^\alpha = 1$.

   Für $\alpha < 0$ folgt $\lim\limits_{x\to \xi} x^\alpha = 1$ mit c) aus Lemma 6.9.

Satz 6.10 (Konvergenzkriterium von Cauchy) *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und ξ sei Häufungspunkt von D. Dann gilt: $\lim\limits_{x \to \xi} f(x)$ existiert genau dann, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit der Eigenschaft:*

$$\text{aus } x, y \in D \setminus \{\xi\} \text{ und } |x - \xi|, |y - \xi| < \delta \text{ folgt } |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Lemma 6.11 *Sei $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $\xi \in D$. Dann gilt für $\lambda \in \mathbb{R}$, dass $\lambda \cdot f,\ f + g,\ f \cdot g$ stetig in ξ sind. Falls $g(\xi) \neq 0$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in ξ.*

Satz 6.12 *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\xi \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von D. Genau dann ist $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = a$, wenn für alle Folgen $(x_n), (y_n)$ aus D mit $x_n < \xi$ bzw. $\xi < y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} y_n = \xi$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f(y_n) = a$.*

Folgerung:

Genau dann ist $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $\xi \in D$, wenn für alle Folgen $(x_n), (y_n)$ in D mit $x_n < \xi$ bzw. $\xi < y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} y_n = \xi$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f(y_n) = f(\xi)$.

Mit anderen Worten: f stetig in $\xi \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \xi-} f(x) = \lim\limits_{x \to \xi+} f(x) = f(\xi)$.

Satz 6.13 (Komposition stetiger Funktionen) *Seien $f : D \to \mathbb{R},\ g : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset \tilde{D}$ und $h : D \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $h = g \circ f$. Ist f stetig in $\xi \in D$ und g stetig in $f(\xi) \in \tilde{D}$, dann ist h stetig in ξ.*

Beispiele:

a) Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $\xi \in D$. Dann sind $f^+,\ f^-,\ |f|,\ \max\{f, g\},\ \min\{f, g\}$ stetig in $\xi \in D$.

b) Seien $\alpha \in \mathbb{R}, \xi > 0$. Wir zeigen: $\lim\limits_{x \to \xi} x^\alpha = \xi^\alpha$. Sei $f(x) = \frac{x}{\xi}, g(y) = (\xi \cdot y)^\alpha = \xi^\alpha y^\alpha$. Dann ist g stetig bei $y = 1$ (vgl. Beispiel b) vor Satz 6.10) und f stetig bei $x = \xi$. Also gilt $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = 1$, $\lim\limits_{y \to 1} g(y) = g(1) = \xi^\alpha$. Folglich gilt $\lim\limits_{x \to \xi} x^\alpha = \lim\limits_{x \to \xi} g(f(x)) = \xi^\alpha$ mit Satz 6.13.

   Die allgemeine Potenzfunktion ist demzufolge stetig auf $(0, \infty)$.

Satz 6.14 (stetige Funktionen auf kompakten Intervallen) *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, d.h. $I = [a, b]$ für $a < b, a, b \in \mathbb{R}$. Falls $f : I \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann gilt:*

a) *f ist beschränkt*

b) *f nimmt Minimum und Maximum an, d.h. es existieren $x_*, x^* \in I$ mit*

$$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) \quad \textit{für alle } x \in I.$$

Satz 6.16 (Nullstellensatz)

Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ (oder umgekehrt). Dann hat f in $[a, b]$ eine erste Nullstelle c_1 und eine letzte Nullstelle c_2 mit $a < c_1 \leq c_2 < b$.

Korollar 6.17 (Zwischenwertsatz)

Ist $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Korollar 6.18 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $f \in C(I)$. Dann ist $f(I)$ ein Intervall.*

Satz 6.19 (Satz über Stetigkeit der Umkehrfunktion)

Sei I beliebiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig und streng monoton wachsend (fallend) sowie $I^* := f(I)$. Dann ist $f^{-1} : I^* \to I$ stetig und streng monoton wachsend (fallend).

Bemerkung: Eine schwächere Form des Satzes über die Stetigkeit der Umkehrfunktion war Satz 3.11, denn dort wurde Lipschitzstetigkeit anstelle von Stetigkeit vorausgesetzt.

Definition 6.20 (Gleichmäßige Stetigkeit) *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig auf $D \subset \mathbb{R}$, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit der Eigenschaft:*

$$\forall x, y \in D \textit{ mit } |x - y| < \delta \textit{ folgt } |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Beachte: In der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit muss $\delta > 0$ so gewählt werden, dass die Bedingung $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ erfüllt ist.

Beispiele:

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $D = [0, \infty)$ ist gleichmäßig stetig. Dazu stellen wir zuerst fest, dass für $x, y \geq 0$ gilt
$$|x - y| \leq x + y + 2\sqrt{x \cdot y},$$
also $\sqrt{|x - y|} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Daraus folgt die Ungleichung
$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} \leq \frac{|x - y|}{\sqrt{|x - y|}} = \sqrt{|x - y|} < \epsilon,$$
falls $|x - y| \leq \delta := \epsilon^2$ und $x \neq y$ und entweder $x \neq 0$ oder $y \neq 0$ ist (in diesen Ausnahmefällen ist die Abschätzung allerdings auch richtig).

b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $D = (0, 1]$ ist nicht gleichmäßig stetig. Seien dazu $x, y > \eta \geq 0$
$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x - y|}{x \cdot y} \leq \frac{|x - y|}{\eta^2} \leq \epsilon,$$
falls $|x - y| < \delta := \eta^2 \cdot \epsilon$.

Bei dieser Wahl ergibt sich folgendes Problem: die Wahl von δ hängt davon ab, dass $x, y \geq \eta > 0$ sind. Es ist unmöglich δ unabhängig von $x, y \in (0, 1]$ zu wählen, denn $x := \frac{1}{n}$, $y := \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$ ergeben, dass $|x - y| = \frac{1}{2n}$ beliebig klein, aber $|f(x) - f(y)| = n$ beliebig groß wird.

c) Sei $f \in Lip(D)$. Dann ist f gleichmäßig stetig auf D. Wähle $\delta = \frac{\epsilon}{L}$, L Lipschitzkonstante.

Satz 6.21 *Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ auf dem kompakten Intervall $I = [a, b]$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig auf I.*

Definition 6.22 (Grenzwerte für $x \to \pm\infty$) *Sei $f : (\alpha, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man sagt, f strebt gegen $a \in \mathbb{R}$ für $x \to \infty$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $c > \alpha$ existiert mit der Eigenschaft:*
$$x > c \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon$$
In Symbolen: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a, \quad f(x) \to a$ *für* $x \to \infty$

In analoger Manier definiert man $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$*, falls* $f : (-\infty, \alpha) \to \mathbb{R}$.

Bemerkungen:

Es gelten folgende Beziehungen:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to 0+} f(\frac{1}{t}) = a, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to 0-} f(\frac{1}{t}) = a$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a \Leftrightarrow$ für jede Folge (x_n) mit $x_n \overset{n\to\infty}{\to} \infty$ gilt $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\to} a$

Beispiel:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{2-t^2}{1+3t+2t^2} = 2$$

Definition 6.23 (Uneigentliche Grenzwerte)

a) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und ξ Häufungspunkt von D. Man sagt: $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \infty$ (bzw. $-\infty$), falls zu jedem $K > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit der Eigenschaft:

$$|x-\xi| < \delta,\ x \in D \setminus \{\xi\} \Rightarrow f(x) > K \ \text{(bzw. } f(x) < -K).$$

b) Sei $f : (\alpha, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man sagt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, falls zu jedem $K > 0$ ein $c > \alpha$ existiert mit der Eigenschaft:

$$x > c \Rightarrow f(x) > K.$$

Analog definiert man $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty, \ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ (bzw. $-\infty$)

Beispiele:

a) Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha = \infty$, falls $\alpha > 0$. Denn aus $x > c := K^{\frac{1}{\alpha}}$ folgt $x^\alpha > K$.

b) Es gilt $\lim\limits_{x\to 1+} \frac{1}{1-x} = -\infty$. Denn mit $\delta := \frac{1}{K}$ folgt aus $1 < x < 1+\delta$ die Beziehung $\frac{1}{1-x} < -K$.

7 Potenzreihen

Definition 7.1

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann heißt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Potenzreihe (in der Variablen x).

Bemerkungen

a) Wie bei Polynomen definiert man $x^0 := 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Gelegentlich werden Potenzreihen auch in der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-\xi)^n$ betrachtet (dabei ist dann $\xi \in \mathbb{R}$ fest).

7.1 Punktweise/gleichmäßige Konvergenz

Definition 7.2 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ sowie $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*

a) $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiert punktweise gegen f, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. D.h. zu jedem $x \in D$ und zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es einen Index $N = N(\epsilon, x) \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \ \forall\ n \geq N$.

b) $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gleichmäßig gegen f, falls gilt: zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es einen Index $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ für alle $n \geq N$ und alle $x \in D$.

Bemerkung: aus gleichmäßiger Konvergenz folgt punktweise Konvergenz

Beispiele

a) $D = [a, b]$, $f_n(x) = \frac{1}{n}x^2$. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf D gegen die Nullfunktion $f = 0$, denn für alle $x \in [a, b]$ gilt:

$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}\max\{a^2, b^2\} < \epsilon$, falls $n > \frac{1}{\epsilon}\max\{a^2, b^2\}$

b) $D = [0,1],\ f_n(x) = x^n$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise.

Für $x = 1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$.

Für $x \in [0,1)$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Definiere $f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 1, \\ 0, & \text{falls } 0 \le x < 1. \end{cases}$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise auf $[0,1]$ gegen f, aber $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen f.

Satz 7.3 (Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz)

Die Folge $(f_n)_{n\ge1}$ von Funktionen konvergiert genau dann gleichmäßig auf D, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein Index $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass gilt:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \text{ für alle } n, m \ge N \text{ und alle } x \in D.$$

Satz 7.4 *Die Folge $(f_n)_{n\ge1}$ konvergiere gleichmäßig auf D gegen die Funktion f. Falls jede Funktion f_n an der Stelle $\xi \in D$ stetig ist, so ist auch die Funktion f stetig an der Stelle ξ.*

7.2 Anwendung auf Funktionenreihen

Definition 7.5 *Sei $(f_n)_{n\ge0}$ eine Folge von Funktionen auf D. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ heißt gleichmäßig konvergent auf D, falls die Funktionenfolge $(s_k)_{k\ge0}$ der Teilsummen, definiert durch $s_k(x) = \sum\limits_{n=0}^{k} f_n(x)$, gleichmäßig auf D konvergiert.*

Satz 7.6 (Weierstraß'sches Majorantenkriterium)

Sei $(f_n)_{n\ge0}$ eine Folge von Funktionen auf D und $(a_n)_{n\ge0}$ eine Folge reeller Zahlen mit $|f_n(x)| \le a_n$ für alle $x \in D$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$. Falls $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig auf D.

Satz 7.7 (Konvergenzsatz für Potenzreihen)

Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*. Sei* $L := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *(*$L = \infty$ *zugelassen) und* $r := \frac{1}{L}$ *(wobei* $r = 0$ *falls* $L = \infty$ *und* $r = \infty$ *falls* $L = 0$*). Dann gilt:*

a) *Die Reihe konvergiert absolut auf* $D = \{x \in \mathbb{R} : |x| < r\}$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *ist stetig auf* D*.*

b) *Die Reihe divergiert für* $x \in \mathbb{R}, |x| > r$*.*

c) *Sei* $0 < s < r$*. Dann konvergiert die Reihe gleichmäßig auf* $D_s = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq s\}$*.*

d) *Falls* $a_n \neq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ *und falls* $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ *existiert (Wert* ∞ *erlaubt), so gilt:* $r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$*.*

Die Zahl r *heißt Konvergenzradius der Potenzreihe.*

7.3 Die Exponentialreihe

Für alle $x \in \mathbb{R}$ definiere $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Die Poteznreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ gleichmäßig auf beschränkten Intervallen, insbesondere ist $\exp(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$.

Proposition 7.8 *Es gilt* $\exp(x) = \tilde{e}^x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $\tilde{e} := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$*.*

Satz 7.9 *Für alles* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = \tilde{e}^x$*. Insbesondere gilt* $\tilde{e} = e =$*Eulersche Zahl.*

Korollar 7.10 *Für alle* $\alpha > 0$ *gilt:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0,$$
$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha e^{-x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0.$$

7.4 Sinus, Cosinus

Definition 7.11

$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Satz 7.12 $\sin x, \cos x$ *sind stetig auf* $\mathbb{R}$*, beide haben Konvergenzradius* $r = \infty$.

Lemma 7.13 (Eigenschaften von $\sin x, \cos x$)

a) $\sin 0 = 0,\ \cos 0 = 1$

b) $\sin(-x) = -\sin x,\ \cos(-x) = \cos x$

c) Additionstheoreme:

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

d) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Lemma 7.14 $\cos x$ *besitzt eine erste positive Nullstelle im Intervall* $(1,3)$.

Definition 7.15 $\frac{\pi}{2}$ *bezeichnet die erste positive Nullstelle von* $\cos x$.

Korollar 7.16

a) $\sin \frac{\pi}{2} = 1,\ \sin \pi = 0,\ \boldsymbol{\sin 2\pi = 0},\ \cos \pi = -1,\ \cos 2\pi = 1$

b) $\sin(x+2\pi) = \sin x,\ \cos(x+2\pi) = \cos x$

c) $\sin(x+\pi) = -\sin x,\ \cos(x+\pi) = -\cos x$

d) $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x,\ \cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x = -\cos(-x+\frac{\pi}{2})$

Korollar 7.17 *Auf* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *ist* $\cos x$ *streng monoton fallend,* $\sin x$ *streng monoton steigend.*

Korollar 7.18 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{-1}{2}$

Definition 7.19 (Tangens, Cotangens)

$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$ *für* $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $\quad \cot x := \frac{\cos x}{\sin x}$ *für* $x \neq k\pi$, $\qquad (k \in \mathbb{N})$

7.5 Arcusfunktionen

$$\begin{array}{lll} \sin x: & [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] & \to [-1,1] \quad \text{streng wachsend und stetig,} \\ \cos x: & [0,\pi] & \to [-1,1] \quad \text{streng fallend und stetig} \end{array}$$

Umkehrfunktionen

$$\begin{array}{lll} \arcsin x: & [-1,1] & \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\ \arccos x: & [-1,1] & \to [0,\pi] \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \tan x: & (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) & \to \mathbb{R} \quad \text{streng wachsend und stetig,} \\ \cot x: & (0,\pi) & \to \mathbb{R} \quad \text{streng fallend und stetig} \end{array}$$

Umkehrfunktionen

$$\begin{array}{lll} \arctan x: & \mathbb{R} & \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \\ \operatorname{arccot} x: & \mathbb{R} & \to (0,\pi) \end{array}$$

7.6 Hyperbelfunktionen

Für alle $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden drei Funktionen erklärt:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{(Sinus Hyperbolicus)}$$

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{(Cosinus Hyperbolicus)}$$

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}; \qquad \coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x} \text{ (definiert für } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$$

7.7 Areafunktionen

Aufgrund ihrer Monotonie besitzen die Hyperbelfunktionen folgende Umkehrfunktionen:

Funktion	Umkehrfunktion
$\sinh x$	$\operatorname{Arsinh} x$ (Areasinushyperbolicus)
$\cosh x\|_{[0,\infty)}$	$\operatorname{Arcosh} x$
$\tanh x$	$\operatorname{Artanh} x$
$\coth x$	$\operatorname{Arcoth} x$

Lemma 7.20

a) $\operatorname{Arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$

b) $\operatorname{Arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, *falls* $x > 1$

c) $\operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$, *falls* $|x| < 1$

d) $\operatorname{Arcoth} x = \frac{1}{2}\ln(\frac{x+1}{x-1})$, *falls* $|x| > 1$

8 Komplexe Zahlen

Definition 8.1

Auf $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ *wird eine Addition und eine Multiplikation wie folgt definiert:*

$$\begin{aligned}(a,b) + (c,d) &= (a+c, b+d)\\(a,b)\cdot(c,d) &= (ac-bd, ad+bc)\end{aligned}$$

$\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *ist ein Körper (Körper der komplexen Zahlen).*

$\mathbb{R} = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$ *wird als Unterkörper von* $\mathbb{C}$ *aufgefasst, denn es gilt*

$$(a,0) + (c,0) = (a+c, 0), \quad (a,0)\cdot(c,0) = (a\cdot c, 0).$$

Konvention: $(a,0) = a$. *Definiere* $\imath := (0,1)$.

Sei $z = (a,b) \in \mathbb{C}$. *Wegen* $(a,b) = (a,0) + (0,1)\cdot(b,0)$ *schreibt man*

$$z = (a,b) = a + \imath b.$$

$a = \operatorname{Re} z$ *heißt Realteil von* z, $b = \operatorname{Im} z$ *heißt Imaginärteil von* z

$\overline{z} = \overline{(a,b)} := a - \imath b$ *heißt die zu* z *komplex konjugierte Zahl.*

$|z| := \sqrt{a^2+b^2}$ *heißt Betrag der komplexen Zahl* z.

Lemma 8.2 (Recheneregeln für komplexe Zahlen)

1) $\imath\cdot\imath = (0,1)\cdot(0,1) = -1$

2) $(a+\imath b)\cdot(c+\imath d) = ac - bd + \imath(ad+bc)$

3) $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$

4) $z = a + \imath b;\ \dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + \imath\dfrac{-b}{a^2+b^2}$

5) $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}; \operatorname{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2\imath}$

6) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w};\ \overline{z\cdot w} = \overline{z}\cdot\overline{w};\ \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$

7) $|z+w| \le |z| + |w|$

8) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

9) $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$

Definition 8.3

Ein komplexes Polynom ist eine Abbildung $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *der Form* $P(z) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j z^j$ *mit Koeffizienten* $\alpha_j \in \mathbb{C}, j = 0, ..., n$. *Man nennt* n *den Grad von* P*, falls* $\alpha_n \neq 0$.

Satz 8.4 (Fundamentalsatz der Algebra; ohne Beweis) *Ein komplexes Polynom vom Grad* $n \geq 1$ *besitzt genau* n *komplexe Nullstellen.*

8.1 Folgen

Definition 8.5 (Konvergente Folgen) *Ein Folge* $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ *komplexer Zahlen konvergiert gegen* $\alpha \in \mathbb{C}$ *falls gilt*

$$\lim_{n\to\infty} |\alpha_n - \alpha| = 0.$$

In Symbolen: $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$.

Lemma 8.6 *Es gelte* $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$. *Dann folgt:*

(a) $\lim_{n\to\infty} (\alpha_n + \beta_n) = \alpha + \beta, \qquad \lim_{n\to\infty} (\alpha_n \cdot \beta_n) = \alpha \cdot \beta, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\alpha}{\beta}$, *falls* $\beta \neq 0$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \mid \alpha_n \mid = \mid \alpha \mid, \qquad \lim_{n\to\infty} (\lambda \cdot \alpha_n) = \lambda \cdot \alpha$ *für* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Lemma 8.7 *Sei* $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ *eine Folge komplexer Zahlen und* $a_n = \operatorname{Re} \alpha_n, b_n = \operatorname{Im} \alpha_n$. *Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha = a + ib \iff \lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Beweis: $|a_n - a|, |b_n - b| \leq |\alpha_n - \alpha| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$.■

Definition 8.8 (Beschränkte Folgen) *Eine Folge* $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ *komplexer Zahlen heißt beschränkt, falls* $K > 0$ *existiert mit*

$$|\alpha_n| \leq K \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Definition 8.9 (Häufungswert) *$\alpha \in \mathbb{C}$ heißt Häufungswert der Folge $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ komplexer Zahlen, falls zu jedem $\epsilon > 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$| \alpha_n - \alpha | < \epsilon.$$

Satz 8.10 (Bolzano-Weierstraß) *Sei $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge komplexer Zahlen. Dann besitzt $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ einen Häufungswert.*

Definition 8.11 (Cauchy-Folge) *Eine Folge $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ komplexer Zahlen heißt Cauchy-Folge, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass gilt:*

$$n, m \geq N \Longrightarrow | \alpha_n - \alpha_m | < \epsilon.$$

Satz 8.12 *Sei $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann gilt: $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ konvergiert $\Longleftrightarrow$ $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ Cauchy-Folge ist.*

8.2 Reihen

Definition 8.13 (Unendliche Reihen) *Sei $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen. Für $k \geq 0$ heißt*

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} \alpha_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$$

k-te Teilsumme. Die Folge der Teilsummen $(s_k)_{k\geq 0}$ heißt unendliche Reihe mit Gliedern α_n. Die unendliche Reihe heißt konvergent, falls die Folge $(s_k)_{k\geq 0}$ der Teilsummen konvergiert. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|$ konvergiert.

Satz 8.14 *$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ seien konvergent und es sei $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n)$ konvergent und es gilt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n) = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n + \mu \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n.$$

Satz 8.15 (Wurzel- und Quotientenkriterium) *Sei $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$.*

a) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} < 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ *absolut konvergent.*

b) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} > 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ *divergent.*

c) $\alpha_n \neq 0$ *für große* n *und* $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| < 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ *absolut konvergent.*

d) $\alpha_n \neq 0$ *für große* n *und* $\liminf\limits_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| > 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ *divergent.*

Für absolut konvergente Reihen komplexer Zahlen gelten der Umordnungssatz 5.16 und der Multiplikationssatz 5.21.

8.3 Funktionen

$B_r(\zeta) := \{z \in \mathbb{C} : |z - \zeta| < r\}$ heißt (offene) Kreisscheibe mit Radius $r > 0$ um $\zeta \in \mathbb{C}$.

Definition 8.16 (Häufungspunkt, isolierter Punkt) *Sei $D \subset \mathbb{C}$.*

a) *$\zeta \in \mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt von D, wenn in jeder Kreisscheibe $B_\epsilon(\zeta)$, $\epsilon > 0$, unendlich viele Punkte von D liegen.*

b) *$\zeta \in D$ heißt isolierter Punkt von D, wenn ζ kein Häufungspunkt von D ist. In diesem Fall existiert ein $\delta > 0$, sodass gilt $B_\delta(\zeta) \cap D = \{\zeta\}$.*

Definition 8.17 (Grenzwert) *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $\zeta \in \mathbb{C}$ sei Häufungspunkt von D. Man sagt: f strebt gegen $\alpha \in \mathbb{C}$ für $z \to \zeta$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit der Eigenschaft*

$$|z - \zeta| < \delta,\ z \in D \setminus \{\zeta\} \Longrightarrow |f(z) - \alpha| < \epsilon.$$

In Symbolen: $\lim\limits_{z\to\zeta} f(z) = \alpha$ *oder* $f(z) \to \alpha$ *für* $z \to \zeta$.

Definition 8.18 (Stetigkeit) *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $\zeta \in D$. f heißt stetig an der Stelle ζ, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit der Eigenschaft*

$$|z - \zeta| < \delta, \ z \in D \Longrightarrow |f(z) - f(\zeta)| < \epsilon.$$

Ist $\zeta \in D$ Häufungspunkt so gilt: f ist stetig an der Stelle $\zeta \Longleftrightarrow \lim\limits_{z\to\zeta} f(z) = f(\zeta)$.

Satz 8.19 (Folgenkriterium) *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $\zeta \in \mathbb{C}$ sei Häufungspunkt von D. Dann gilt*

a) $\lim\limits_{z\to\zeta} f(z) = \alpha \Longleftrightarrow$ *für jede Folge* $(z_n) \subset D \setminus \{\zeta\}$ *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \zeta$ *gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \alpha$.

b) f *stetig in* $\zeta \in D \Longleftrightarrow$ *für jede Folge* $(z_n) \subset D$ *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \zeta \in D$ *gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(\zeta)$.

Für Grenzwerte gelten die Rechenregeln (a), (b), (c) aus Lemma 6.9.
Die Komposition stetiger Funktionen ist wieder stetig; vgl. Satz 6.12.

Definition 8.20 (Punktweise, gleichmäßige Konvergenz) *Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$.*

(a) $(f_n)_{n\geq 1}$ *konvergiert punktweise auf D gegen f falls für alle $z \in D$ gilt:* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$.

(b) $(f_n)_{n\geq 1}$ *konvergiert gleichmäßig auf D gegen f falls gilt: zu jedem $\epsilon > 0$ exisitert ein $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ für alle $z \in D$ und alle $n \geq N$.*

Es gilt das Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz, vgl. Satz 7.3.

Satz 8.21 *Sei $D \subset \mathbb{C}$. Die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ konvergiere gleichmäßig auf D gegen die Funktion f. Falls jede Funktion f_n an der Stelle $\zeta \in D$ stetig ist, so ist f stetig an der Stelle ζ.*

Definition 8.22 *Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $(f_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ heißt gleichmäßig auf D konvergent, falls die Folge $(s_k)_{k\geq 0}$ der k-ten Teilsummen, definiert durch $s_k(z) := \sum\limits_{n=0}^{k} f_n(z)$, gleichmäßig auf D konvergiert.*

Satz 8.23 (Weierstraßsches Majorantenkriterium) *Sei $D \subset \mathbb{C}$, $(f_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ und $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen mit $|f_n(z)| \leq a_n$ für alle $z \in D$ und alle $n \geq 0$. Falls $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig auf D.*

8.4 Potenzreihen

Definition 8.24 (Komplexe Potenzreihen) *Sei $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann heißt die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ Potenzreihe (in der komplexen Variablen $z \in \mathbb{C}$).*

Gelegentlich werden auch Potenzreihen in der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-\zeta)^n$ betrachtet. Dabei ist $\zeta \in \mathbb{C}$ fest.

Satz 8.25 (Konvergenzsatz) *Gegeben sei die komplexe Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$.*

Sei $L = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|}$ und $r := \dfrac{1}{L}$. Dann gilt:

(a) Die Reihe konvergiert absolut auf der Kreisscheibe $B_r(0)$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ ist stetig auf $B_r(0)$.

(b) Die Reihe divergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > r$.

(c) Für $0 < s < r$ konvergiert die Reihe gleichmäßig auf $D_s = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq s\}$.

(d) Falls $\alpha_n \neq 0$ für große n und falls $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|\alpha_n|}{|\alpha_{n+1}|}$ existiert (∞ zugelassen), so gilt $r = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|\alpha_n|}{|\alpha_{n+1}|}$.

Die (reelle) Zahl r heißt **Konvergenzradius** *der Potenzreihe.*

8.5 Komplexe Exponentialfunktion

Definition 8.26 (Komplexe Exponentialfunktion, komplexe trigonometrische Funktionen)

$$\left.\begin{aligned} e^z &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\ \cos z &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\ \sin z &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}\right\} \quad \textit{absolut konvergent für alle } z \in \mathbb{C}, \textit{ Konvergenzradius } r = \infty$$

Lemma 8.27

a) $e^z e^w = e^{z+w} \ \forall z, w \in \mathbb{C}$.

b) $e^{\imath z} = \cos z + \imath \sin z$, *insbesondere* $e^{\imath \pi} = -1$.

c) Für $t \in \mathbb{R}$ *ist* $|e^{\imath t}| = 1$.

d) Die Abbildung $\left\{\begin{array}{rcl} [0, 2\pi) & \to & \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \\ t & \mapsto & e^{\imath t} \end{array}\right.$ *ist bijektiv.*

Beweis: (a) wird wie im reellen Fall mit Hilfe des Cauchy-Produktes für Reihen bewiesen, vgl. Kapitel 5.5.

(b) beachte $\imath^{2n} = (-1)^n, \imath^{2n+1} = \imath(-1)^n$. Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} e^{\imath z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\imath^n z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + \imath \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos z + \imath \sin z. \end{aligned}$$

(c) Sei $t \in \mathbb{R}$. Wegen $e^{\imath t} = \cos t + \imath \sin t$ liegt die Aufteilung in Real- und Imaginärteil bereits vor. Somit ist

$$|e^{\imath t}| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1.$$

(d) Die Abbildung $t \mapsto e^{\imath t}$ von $[0, 2\pi)$ auf die komplexe Einheitssphäre A ist stetig. Die Abbildung ist auch injektiv, denn ist $e^{\imath t} = e^{\imath \tau}$ so folgt $e^{\imath(t-\tau)} = 1$, d.h. $t - \tau = 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Wegen $t, \tau \in [0, 2\pi)$ ist $k = 0$ und daher $t = \tau$.

Nun zeigen wir die Surjektivität. Dazu sei zuerst ein Element $z \in A$ mit $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z > 0$ gegeben. Wir setzen

$$t = \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$$

und stellen fest $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Weiterhin gilt

$$\cos^2 t = \frac{1}{1 + \tan^2 t}, \quad \text{d.h.} \quad \cos t = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right)^2}} = \operatorname{Re} z$$

sowie

$$\sin t = \tan t \cos t = \operatorname{Im} z.$$

Insgesamt erhalten wir $z = e^{\imath t}$.

Nun sei $z \in A$ mit $\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z < 0$. Dann ist $\tilde{z} := \imath z = -\operatorname{Im} z + \imath \operatorname{Re} z$ so, daß $\operatorname{Re} \tilde{z}, \operatorname{Im} \tilde{z} > 0$ ist und wir wie oben ein $\tilde{t} \in (0, \frac{\pi}{2})$ finden mit $\tilde{z} = e^{\imath \tilde{t}}$ und somit

$$e^{\imath(\tilde{t} + \frac{3\pi}{2})} = e^{\imath \tilde{t}}(-\imath) = z.$$

Analog verfährt man für $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z < 0$, indem man $\tilde{z} = -z$ setzt, $\tilde{z} = e^{\imath \tilde{t}}$ erhält und

$$e^{\imath(\tilde{t} + \pi)} = e^{\imath \tilde{t}}(-1) = z.$$

Schließlich, im Fall $\operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z > 0$ setzt man $\tilde{z} = (-\imath)z = e^{\imath \tilde{t}}$ und erhält

$$e^{\imath(\tilde{t} + \frac{\pi}{2})} = e^{\imath \tilde{t}} \imath = z.$$

Die Punkte $1, \imath, -1, -\imath \in A$ werden durch $e^0, e^{\imath \frac{\pi}{2}}$, $e^{\imath \pi}$ und $e^{\imath \frac{3\pi}{2}}$ dargestellt. Somit wurde jeder Punkte von A in der From $e^{\imath t}$ mit $t \in [0, 2\pi)$ eindeutig dargestellt. ■

Definition 8.28 (Polarkoordinaten)

Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann existiert genau ein $t \in [0, 2\pi)$ mit $z = |z| e^{\imath t}$ und $t = \arg z$ heisst Argument von z.

Lemma 8.29 (Multiplikation komplexer Zahlen)

Sei $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z = |z| e^{\imath \arg z}$; $w = |w| e^{\imath \arg w}$. *Dann gilt:* $zw = |z||w| e^{\imath(\arg z + \arg w)}$, *d.h. bei der Berechnung des Produktes zweier komplexer Zahlen multiplizieren sich die Längen und die Winkel addieren sich.*

Lemma 8.30 (Additionstheoreme)

$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$

$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$

Beweis: Wegen $e^{\imath z} = \cos z + \imath \sin z$ gilt

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{\imath z} + e^{-\imath z}\right) \quad \text{sowie } \sin z = \frac{1}{2\imath}\left(e^{\imath z} - e^{-\imath z}\right).$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} \cos(z + w) &= \frac{1}{2}\big(e^{\imath z} e^{\imath w} + e^{-\imath z} e^{-\imath w}\big) \\ &= \frac{1}{2}\Big((\cos z + \imath \sin z)(\cos w + \imath \sin w) + (\cos z - \imath \sin z)(\cos w - \imath \sin w)\Big) \\ &= \cos z \cos w - \sin z \sin w. \end{aligned}$$

Ähnlich zeigt man das Additionstheorem für den Sinus. ■

Definition 8.31 (Komplexe Hyperbelfunktionen)

$$\left.\begin{aligned} \sinh z &:= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cosh z &:= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}\right\} \quad \textit{absolut konvergent für alle } z \in \mathbb{C}, \textit{ Konvergenzradius } r = \infty$$

Es gilt: $\sinh(\imath z) = \imath \sin z$ und $\cosh(\imath z) = \cos z$

9 Differentiation

9.1 Differenzenquotient, Ableitung

Definition 9.1 *Sei I ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt an der Stelle $\xi \in I$ differenzierbar, falls $\lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ existiert (gleichbedeutend: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$ existiert). Der Wert des Limes heißt Ableitung von f an der Stelle ξ.*

In Symbolen: $f'(\xi)$ bzw. $\dfrac{df}{dx}(\xi)$

Bemerkung: Der Begrifff der Ableitung hat eine geometrische Bedeutung. Die Tangentensteigung der Kurve $x \mapsto (x, f(x))$ im Punkt $(\xi, f(\xi))$ ist gegeben durch $f'(\xi)$.

Beispiele:

a) $f(x) = e^x$; $\dfrac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} = \dfrac{e^{\xi+h} - e^\xi}{h} = \dfrac{e^\xi \cdot (e^h - 1)}{h} \overset{h\to 0}{\to} e^\xi$. D.h. $f'(\xi) = e^\xi$.

b) $f(x) = \sin x$. Es gilt $f'(\xi) = \cos\xi$, denn

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\xi + h) - \sin\xi}{h} &= \frac{\sin\xi\cos h + \cos\xi\sin h - \sin\xi}{h} \\ &= \sin\xi\frac{\cos h - 1}{h} + \cos\xi\frac{\sin h}{h} \overset{h\to 0}{\to} \cos\xi.\end{aligned}$$

c) $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Es gilt $f'(\xi) = n\xi^{n-1}$, denn

$$\begin{aligned}\frac{(\xi + h)^n - \xi^n}{h} &= \frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^k\xi^{n-k} - \xi^n\right) \\ &= \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^k\xi^{n-k} \overset{h\to 0}{\to} \binom{n}{1}\xi^{n-1} = n\xi^{n-1}.\end{aligned}$$

Definition 9.2 (Einseitige Differenzierbarkeit) *Sei* $\delta > 0$.

a) $f : [\xi, \xi + \delta] \to \mathbb{R}$. *Dann heißt* $f'_+(\xi) = \lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$ *rechtsseitige Ableitung von* f *an der Stelle* ξ*, falls der Limes existiert.*

b) $f : [\xi - \delta, \xi] \to \mathbb{R}$. *Dann heißt* $f'_-(\xi) = \lim\limits_{h \to 0-} \dfrac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$ *linksseitige Ableitung von* f *an der Stelle* ξ*, falls der Limes existiert.*

Definition 9.3 *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *Intervall und* $f : I \to \mathbb{R}$.

a) f *heißt auf* I *differenzierbar, wenn* $f'(\xi)$ *für alle* $\xi \in I$ *existiert. In Randpunkten müssen nur die einseitige Ableitungen existieren.*

b) *Ist* f *auf* I *differenzierbar, so heißt* $f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array} \right.$ *Ableitungsfunktion von* f.

c) f *heißt stetig differenzierbar auf* I*, falls* f' *auf* I *existiert und stetig ist. In Symbolen:* $f \in C^1(I)$.

Im Folgenden sei I ein beliebiges Intervall.

Satz 9.4 (Eigenschaften der Ableitung) *Sei* $f : I \to \mathbb{R}$ *an der Stelle* $\xi \in I$ *differenzierbar. Dann gilt:*

a) *Es existiert* $K > 0,\ \delta > 0$ *mit*

$$|f(x) - f(\xi)| \leq K|x - \xi| \qquad \text{für alle } x \in I \text{ mit } |x - \xi| \leq \delta.$$

b) f *ist stetig an der Stelle* ξ.

c) *Ist* $f'(\xi) > 0$*, so gibt es ein* $h_0 > 0$ *mit*

$$f(\xi - h) < f(\xi) < f(\xi + h), \text{ falls } 0 < h \leq h_0.$$

d) *Ist* $f'(\xi) < 0$*, so gibt es ein* $h_0 > 0$ *mit*

$$f(\xi - h) > f(\xi) > f(\xi + h), \text{ falls } 0 < h \leq h_0.$$

Ist ξ *Randpunkt von* I*, so gilt in c), d) jeweils nur eine der beiden Ungleichungen.*

Korollar 9.5 *Sei $\delta > 0$ und $f : (\xi - \delta, \xi + \delta) \to \mathbb{R}$ sei in ξ differenzierbar und besitze ein Minimum oder Maximum an der Stelle ξ. Dann ist $f'(\xi) = 0$.*

Satz 9.6 (Äquivalente Charakterisierung der Ableitung)

Sei $\delta > 0$ und $f : (\xi - \delta, \xi + \delta) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ ist differenzierbar in } \xi \Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} &\text{ und eine Funktion } \eta : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R} \text{ mit} \\ &f(\xi + h) = f(\xi) + c \cdot h + \eta(h) \cdot h \text{ und } \lim_{h \to 0} \eta(h) = 0. \\ &\text{In diesem Fall gilt } f'(\xi) = c. \end{aligned}$$

9.2 Rechenregeln für Ableitungen

Satz 9.7 *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ an der Stelle $\xi \in I$ differenzierbar. Dann sind $f + g$, $\lambda \cdot f$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), $f \cdot g$ an der Stelle ξ differenzierbar und es gilt:*

$$(f+g)'(\xi) = f'(\xi) + g'(\xi),\ (\lambda \cdot f)'(\xi) = \lambda \cdot f'(\xi),\ (f \cdot g)'(\xi) = f'(\xi) \cdot g(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi)$$

Ist $g(\xi) \neq 0$ so ist $\frac{f}{g}$ an der Stelle ξ differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{f'(\xi) \cdot g(\xi) - f(\xi) \cdot g'(\xi)}{g(\xi)^2}.$$

Satz 9.8 (Kettenregel) *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $f : I \to \mathbb{R}, g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(I) \subset J$ und es sei die Funktion $h : I \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h := g \circ f$. Dann gilt: ist f an der Stelle $\xi \in I$ differenzierbar und g an der Stelle $\eta = f(\xi)$ differenzierbar, dann ist h an der Stelle ξ differenzierbar mit:*

$$h'(\xi) = g'(f(\xi)) \cdot f'(\xi)$$

Satz 9.9 (Ableitung der Umkehrfunktion)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton und $\xi \in I$. Falls $\Phi = f^{-1} : f(I) \to I$ an der Stelle $\eta = f(\xi)$ differenzierbar ist mit $\Phi'(\eta) \neq 0$, so ist f an der Stelle ξ differenzierbar und es gilt:

$$f'(\xi) = \frac{1}{\Phi'(f(\xi))}$$

Definition 9.10

$f : I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und $f' : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{cases}$ sei die Ableitungsfunktion.

Falls f' an der Stelle ξ differenzierbar ist, so heißt $\dfrac{df'}{dx}(\xi)$ die zweite Ableitung von f an der Stelle ξ. In Symbolen: $f''(\xi)$ bzw. $\dfrac{d^2 f}{dx^2}(\xi)$

Analog: $f''' = (f'')'$, $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, etc., $f^{(n)} = \dfrac{d^n f}{dx^n}, n \geq 1$

Ist $f^{(n)}$, $n \geq 1$, stetig, so heißt f n-mal stetig differenzierbar. Schreibweise: $f \in C^n(I)$.

Zusatz: $C^0(I) = C(I) =$ Menge der stetigen Funktionen auf I

$C^\infty(I) = \bigcap\limits_{n \geq 1} C^n(I) =$ Menge der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen auf I

9.3 Mittelwertsatz und Folgerungen

Satz 9.11 (Satz von Rolle)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und auf (a, b) differenzierbar. Falls $f(a) = f(b)$ ist, dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Satz 9.12 (Mittelwertsatz)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Satz 9.13 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz)

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$. Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Folgerungen aus dem Mittelwertsatz:

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall.

a) $f' = 0$ in $I \Rightarrow f$ konstant in I

b) $|f'(x)| \leq L \ \forall x \in I \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \ \forall x, y \in I$

c) $f' \geq 0$ in $I \Rightarrow f$ monoton wachsend in I

d) $f' \leq 0$ in $I \Rightarrow f$ monoton fallend in I

e) $f' > 0$ in $I \Rightarrow f$ streng monoton wachsend in I

f) $f' < 0$ in $I \Rightarrow f$ streng monoton fallend in I

Beispiele für Anwendungen:

a) Für $x \geq 0$ ist $\sin x \geq x$, denn für $x \geq 0$ gilt: $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \cos \xi \leq 1$ für ein $\xi \in (0, x)$.

b) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ (mit Folgerung b), siehe oben).

c) $|\sinh x - \sinh y| \geq |x - y|$, denn für $x < y$ gilt $\dfrac{\sinh x - \sinh y}{x - y} = \cosh \xi \geq 1$ für ein $\xi \in (x, y)$.

Satz 9.14 (Regel von Bernoulli-L'Hospital)

Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$.

Voraussetzung: *Es gelte*

entweder:

a) $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} g(x) = 0$

oder:

b) $\lim\limits_{x \to a+} g(x) = +\infty$ *oder* $-\infty$ *(keine weitere Vorausetzung an f).*

Dann gilt:

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der zweite Limes im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne existiert.

Zusatz:

a) $a = -\infty$ *ist zugelassen.*

b) Die Aussagen gelten auch für $\lim\limits_{x \to b-}$ *und* $b = \infty$ *ist zugelassen.*

Beispiele:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{\sqrt{\ln x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{1}{x \ln x}}{\frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{\sqrt{\ln x}} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\sin x}{2x} = -\dfrac{1}{2}$

10 Das Riemannsche Integral

Es sei stets $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

Für Intervalle $J = [x, y]$ sei $|J| = y - x$ die Länge von J.

10.1 Ober- und Untersummen

Definition 10.1 *Sei $I = [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt.*

a) Gegeben seien endlich viele Punkte $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, die I in die Teilintervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, \ldots, n)$ zerlegen.

$Z = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ heißt Zerlegung von I,

$|Z| = \max\limits_{k=0,\ldots,n} |I_k|$ heißt Feinheitsmaß von Z.

b) Seien $m_k = \inf\limits_{I_k} f, M_k = \sup\limits_{I_k} f$ für $k = 1, \ldots, n$. Dann heißt

$$s(Z) = s(Z, f) := \sum_{k=1}^{n} m_k |I_k| \ \textit{Untersumme}$$

$$S(Z) = S(Z, f) := \sum_{k=1}^{n} M_k |I_k| \ \textit{Obersumme}$$

c) Seien Z, Z' Zerlegungen von I. Z heißt Verfeinerung von Z', wenn Z jeden Teilpunkt von Z' enthält. In Zeichen: $Z' < Z$.

$\tilde{Z} = Z + Z'$ bezeichnet diejenige Zerlegung von I, die alle Teilpunkte von Z, Z' enthält.

Bemerkung: Beachte: aus $|f(x)| \leq K \ \forall x \in I$ folgt $-K(b - a) \leq s(Z), \ S(Z) \leq K(b - a)$.

Lemma 10.2 *Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt mit $|f(x)| \leq K \ \forall x \in I$. Sei Z' Zerlegung von I mit $p \in \mathbb{N}$ inneren Punkten und Z beliebige Zerlegung von I. Dann gilt:*

$$s(Z) \leq s(Z + Z') \leq s(Z) + 2pK|Z|$$
$$S(Z) \geq S(Z + Z') \geq S(Z) - 2pK|Z|$$

Beweis: (für Untersummen) Sei $p = 1$, d.h. $Z' = (a, \xi, b)$ und $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Falls $\xi = x_k$ für ein $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ ist, dann gilt $Z = Z + Z'$ und die Behauptung stimmt. Wir betrachten also den Fall $\xi \in (x_{k-1}, x_k)$ für ein $k \in \{1, \ldots, n\}$. Setze

$$I' = [x_{k-1}, \xi] \text{ und } I'' = [\xi, x_k]$$

sowie

$$m' = \inf_{I'} f, \quad m'' = \inf_{I''} f.$$

Es folgt die Abschätzung

$$s(Z + Z') - s(Z) = m'|I'| + m''|I'| - m_k|I_k| = |I'| \underbrace{(m' - m_k)}_{\geq 0} + |I''| \underbrace{(m'' - m_k)}_{\geq 0} \geq 0$$

und

$$s(Z + Z') - s(Z) \leq 2K(|I'| + |I''|) = 2K|I_k| \leq 2K|Z|.$$

Damit ist der Satz für $p = 1$ bewiesen. Nun fahren wir fort mit Induktion über $p \in \mathbb{N}$ und nehmen als Induktionsveraussetzung an, dass die Aussage für alle natürlichen $p \leq p_0 \in \mathbb{N}$ gilt und betrachten nun die Aussage für $p_0 + 1$. D.h. in diesem Fall ist

$$Z' = (a, \xi_1, \ldots, \xi_{p_0}, \xi_{p_0+1}, b) = Z'_0 + Z'_1,$$

wobei die Zerlegungen Z'_0, Z'_1 wie folgt definiert sind:

$$Z'_0 = (a, \xi_1, \ldots, \xi_{p_0}, b), Z'_1 = (a, \xi_{p_0+1}, b).$$

Nun gilt

$$\begin{array}{rcll} s(Z) & \leq & s(Z + Z'_0) & \text{nach Induktionsvoraussetzung (IV)} \\ & \leq & \underbrace{s(Z + Z'_0 + Z'_1)}_{=s(Z+Z')} & \text{wieder nach IV} \\ & \leq & s(Z + Z'_0) + 2K|Z + Z'_0| & \text{wg. 2. Ungleichung, IV} \\ & \leq & s(Z) + 2pK|Z| + 2K|Z + Z'_0| & \text{nochmals 2. Ungleichung, IV} \\ & \leq & s(Z) + 2(p+1)K|Z| & \text{da } |Z + Z'_0| \leq |Z|. \end{array}$$

Die Behauptung folgt, wenn man die Ungleichungen der ersten, zweiten und letzten Zeile liest.
■

Korollar 10.3 *Seien Z, Z' beliebige Zerlegungen. Dann gilt $s(Z) \leq S(Z')$.*

10.2 Definition des Riemannschen Integrals

Definition 10.4 *Sei $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann heißt*

a) $J_* = J_*(f) = \sup_Z s(Z) = \underline{\int_a^b} f(x)dx$ *unteres Riemannsches Integral*

b) $J^* = J^*(f) = \inf_Z S(Z) = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ *oberes Riemannsches Integral,*

wobei Infimum und Supremum über alle Zerlegungen Z von I gebildet werden.

Lemma 10.5 *Es gilt $J_*(f) \leq J^*(f)$.*

Definition 10.6 *Sei $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. f heißt Riemann-integrierbar auf I, falls $J^*(f) = J_*(f)$. Der gemeinsame Wert heißt Riemann-Integral von f über I und wird mit $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet.*
$R([a,b])$ = Menge der auf $[a,b]$ Riemann-integrierbaren Funktionen.

Satz 10.7 *Sei $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen mit $|Z_n| \overset{n\to\infty}{\to} 0$ (Zerlegungsnullfolge). Dann gilt:*

$$J_* = \lim_{n\to\infty} s(Z_n), \;\; J^* = \lim_{n\to\infty} S(Z_n)$$

Beispiele:

$I = [a,b],\; Z_n = (a, a+h, a+2h, \ldots, a+nh = b),\; h = \frac{b-a}{n}$ (äquidistante Zerlegung)

a) Sei $f(x) = x$. Dann gilt für die oben gewählte Zerlegung $m_k = a+(k-1)h,\; M_k = a+kh$. Für die Untersumme ergibt sich

$$s(Z_n) = h \cdot \sum_{k=1}^{n} \Big(a + (k-1)h\Big) = nha + h^2 \frac{n(n-1)}{2} = (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{n^2}$$
$$\overset{n\to\infty}{\to} \frac{b^2-a^2}{2}$$

und für die Obersumme folgt:

$$S(Z_n) = h \cdot \sum_{k=1}^{n}(a+kh) = nha + n^2 \cdot \frac{n(n+1)}{n^2} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{b^2-a^2}{2}$$

Mit Satz 10.7 folgt das Ergebnis: $\displaystyle\int_a^b x dx = \frac{b^2-a^2}{2}$.

b) Jetzt sei $f(x) = x^2$ und $a = 0$. Wir wählen erneut eine äquidistante Zerlegung wie im vorherigen Beispiel. Die zugehörige Untersumme ist:

$$s(Z_n) = h^3 \cdot \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 = h^3 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = h^3 \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) \overset{n\to\infty}{\to} \frac{b^3}{3}$$

und die Obersumme ist:

$$S(Z_n) = h^3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = h^3 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \overset{n\to\infty}{\to} \frac{b^3}{3}$$

Erneut folgt mit Satz 10.7 das Ergebnis: $\displaystyle\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$

Satz 10.8 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)

Sie $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:

f ist auf I integrierbar $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists$ Zerlegung Z mit $S(Z) - s(Z) < \epsilon$.

Satz 10.9 (Klassen integrierbarer Funktionen)

Folgende Klassen von Funktionen $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ sind integrierbar

a) f ist monoton

b) f ist auf $[a,b]$ beschränkt und mit Ausnahme höchstens endlich vieler Punkte stetig.

Beweis: (a) Sei f monoton wachsend (für monoton fallende Funktionen ist der Beweis analog). Also gilt $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ für alle $x \in [a,b]$. Ist $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung des

Intervalls $[a,b]$, so gilt

$$\begin{aligned} S(Z)-s(Z) &= \sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)|I_k| \\ &= \sum_{k=1}^{n}\big(f(x_k)-f(x_{k-1})\big)|I_k| \\ &\leq |Z|\sum_{k=1}^{n}\big(f(x_k)-f(x_{k-1})\big) \\ &= |Z|\big(f(b)-f(a)\big) \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

falls $|Z| < \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}$ (der Fall $f(b)=f(a)$ führt sofort zu $S(Z)=s(Z)$). Die Behauptung folgt mit dem Riemannschen Integrabilitätskriterium.

(b1) Sei f stetig auf $[a,b]$. Insbesondere ist dann f gleichmäßig stetig auf $[a,b]$. Zu $\epsilon>0$ gibt es also ein $\delta>0$ mit der Eigenschaft

$$|f(x)-f(y)|<\epsilon \text{ für alle } x,y\in[a,b] \text{ mit } |x-y|<\delta.$$

Falls $Z=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ eine Zerlegung von $[a,b]$ ist mit $|Z|<\delta$, so folgt

$$M_k-m_k=f(\xi_k)-f(\eta_k)<\epsilon,$$

da $\xi_k,\eta_k\in I_k$ liegen und $|I_k|\leq|Z|<\delta$ ist. Folglich gilt

$$S(Z)-s(Z)=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)|I_k|<\epsilon\sum_{k=1}^{n}|I_k|=\epsilon(b-a).$$

Die Behauptung folgt erneut aus dem Riemannschen Integrabilitätskriterium.

(b2) Nun sei $|f|\leq K$ in $[a,b]$ und $a\leq u_1<u_2<\ldots<u_p\leq b$ seien die Unstetigkeitsstellen von f. Sei $\epsilon>0$. Wähle abgeschlossene Teilintervalle $I'_1,\ldots,I'_p$ mit $\sum_{i=1}^{p}|I'_i|<\epsilon$, so dass f auf $[a,b]\setminus\bigcup_{i=1}^{p}I'_i$ gleichmäßig stetig ist. Wie zuvor existiert ein $\delta>0$ mit

$$|f(x)-f(y)|<\epsilon \text{ für alle } x,y\in[a,b]\setminus\bigcup_{i=1}^{p}I'_i \text{ mit } |x-y|<\delta.$$

Nun wählen wir eine Zerlegung Z von $[a,b]$ mit Teilintervallen $I_1,\ldots,I_n$, die die Teilintervalle $I'_1,\ldots,I'_p$ umfasst und für die $|Z|<\delta$ gilt. Sei

$$A=\{k\in\mathbb{N}:1\leq k\leq n \text{ und } I_k=I'_i \text{ für ein } i=1,\ldots,p\},$$

d.h. die Menge A umfasst diejenigen Indizes k, für die I_k mit einem der Intervalle $I'_1, \ldots, I'_p$ übereinstimmt. Für $k \in A' := \{1, \ldots, n\} \setminus A$ folgt

$$M_k - m_k < \epsilon.$$

Daraus erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} S(Z) - s(Z) &= \sum_{k \in A'} (M_k - m_k)|I_k| + \sum_{k \in A} (M_k - m_k)|I_k| \\ &< \epsilon(b-a) + 2K \sum_{i=1}^{p} |I'_i| \\ &< \epsilon(b - a + 2K). \end{aligned}$$

Wieder folgt die Behauptung aus dem Riemannschen Integrabilitätskriterium. ∎

10.3 Riemannsche Zwischensummen

Definition 10.10 *Sei $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Wird aus jedem Intervall $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ ein Punkt ξ_k ausgewählt, so heißt $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ Zwischenvektor und*

$$\sigma(Z, \xi, f) = \sigma(Z, \xi) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|I_k|$$

heißt Riemannsche Zwischensumme.

Bemerkung: Beachte, dass für jede Zerlegung $s(Z) \leq \sigma(Z, \xi) \leq S(Z)$ gilt.

Lemma 10.11 *Sei Z beliebige Zerlegung von $[a,b]$. Zu jedem $\epsilon > 0$ existieren Zwischenvektoren ξ, η, sodass gilt:*

$$s(Z) \leq \sigma(Z, \xi) \leq s(Z) + \epsilon$$

$$S(Z) \geq \sigma(Z, \xi) \geq S(Z) - \epsilon$$

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. Ist I_k, $k = 1, \dots, n$, ein Teilintervall der Zerlegung Z, so existieren $\xi_k, \eta_k \in I_k$ mit

$$m_k \leq f(\xi_k) \leq m_k + \frac{\epsilon}{b-a}, \qquad M_k \geq f(\eta_k) \geq M_k - \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Sei $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ und $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$. Es folgt

$$\begin{aligned} s(Z) \leq& \sigma(Z, \xi) \leq s(Z) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{b-a} |I_k| = s(Z) + \epsilon, \\ S(Z) \geq& \sigma(Z, \eta) \geq S(Z) - \epsilon. \end{aligned}$$

■

Satz 10.12 (Charakterisierung des Integrals mittels Zwischensummen) *Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:*

$$f \in R([a, b]) \Leftrightarrow \forall \textit{Zerlegungsnullfolge } Z_n \textit{ mit Zwischenvektor } \xi^n \textit{ konvergiert } \sigma(Z_n, \xi^n).$$
$$\textit{In diesem Fall gilt } \lim_{n\to\infty} \sigma(Z_n, \xi^n) = \int_a^b f(x)dx.$$

Beweis: „$\Rightarrow$ “: Die Behauptung folgt aus den Ungleichungen

$$s(Z_n) \leq \sigma(Z_n, \xi^n) \leq S(Z_n).$$

„$\Leftarrow$ “: Sei (Z_n) eine Zerlegungsnullfolge. Dann existieren nach Lemma 10.11 Zwischenvektoren ξ^n, η^n mit

$$\begin{aligned} s(Z_n) \leq& \sigma(Z_n, \xi^n) \leq s(Z_n) + \frac{1}{n} \\ S(Z_n) \geq& \sigma(Z_n, \eta^n) \geq S(Z_n) - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Es folgt $\lim_{n\to\infty} \sigma(Z_n, \xi^n) = J_*$ und $\lim_{n\to\infty} \sigma(Z_n, \eta^n) = J^*$. Außerdem konvergiert nach Voraussetzung auch die gemischte Folge

$$\sigma(Z_1, \xi^1), \sigma(Z_1, \eta^1), \sigma(Z_2, \xi^2), \sigma(Z_2, \eta^2), \dots$$

und daher gilt $J_* = J^*$. ■

Beispiel: Wir zeigen mit Hilfe Riemannscher Zwischensummen, dass für $\alpha \neq -1$ und $0 < a < b$ gilt: $\int_a^b x^\alpha dx = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha + 1}$

Beweis: $f(x) = x^\alpha$ ist auf $[a, b]$ mit $a > 0$ stetig. Die Riemann-Integrierbarkeit folgt also aus Satz 10.9(b). Sei die Zerlegung Z_n gegeben durch $Z_n = (a, aq, aq^2, \ldots, aq^n)$ mit $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ und ξ^n ein Zwischenvektor mit $\xi^n = (a, aq, \ldots, aq^{n-1})$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\sigma(Z_n, \xi^n) &= \sum_{k=1}^{n} (aq^{k-1})^\alpha a(q^k - q^{k-1}) \\
&= a^{\alpha+1} \sum_{k=0}^{n-1} q^{k(\alpha+1)}(q-1) \\
&= (q-1)a^{\alpha+1} \frac{q^{(\alpha+1)n} - 1}{q^{\alpha+1} - 1} \\
&= \frac{q-1}{q^{\alpha+1} - 1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) \\
&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha + 1}
\end{aligned}$$

10.4 Eigenschaften des Riemannschen Integrals

Definition 10.13 (Integral für komplexwertige Funktionen)

Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{C}$ beschränkt, d.h. $|f(x)| \leq K \ \forall x \in I$. Sei $g(x) = \operatorname{Re} f(x),\ h(x) = \operatorname{Im} f(x)$, d.h. $f(x) = g(x) + \imath h(x)$. f heißt Riemann-integrierbar auf I, falls g, h Riemann-integrierbar auf I sind. Man definiert:

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^b g(x)dx + \imath \int_a^b h(x)dx$$

Satz 10.14 (Linearität des Integrals)

Seien $f, g \in R(I)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist $\alpha f + \beta g \in R(I)$ und es gilt:

$$\int_a^b \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Satz 10.15 (Eigenschaften des Integrals)

Sei $I = [a, b]$ und seien $f, g \in R(I)$ beschränkt mit $|f(x)|, |g(x)| \leq K \; \forall x \in I$. Dann gilt:

a) *Ist $\Phi : [-K, K] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, so folgt $\Phi \circ f \in R(I)$.*

b) *$|f|, f^+, f^-, f^2 \in R(I)$. Falls $\inf_I |f| > 0$, damit ist $\frac{1}{f} \in R(I)$.*

c) *$f \cdot g, \; \max(f, g), \; \min(f, g) \in R(I)$*

d) *Ist $f = h$ auf $I \setminus \{x_1, \dots, x_p\}, p \in \mathbb{N} \Rightarrow h \in R(I)$ und $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b h(x)dx$.*

Satz 10.16 (Monotonie des Integrals)

$f, g : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ seien beschränkt und $f \leq g$ auf I. Dann gilt:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} g(x)dx \text{ und } \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} g(x)dx$$

Falls $f, g \in R(I)$, so gilt das Gleiche für das Riemann-Integral.

Satz 10.17 (Dreiecksungleichung)

Für $f \in R(I)$ gilt:

$$\Big| \int_a^b f(x)dx \Big| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

<u>Bemerkung:</u> *Satz 10.17 gilt auch für komplexwertige Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{C}$.*

Satz 10.18 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $I = [a, b]$, $f \in R(I)$ und $\mu(f) := \dfrac{1}{b - a} \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ (Mittelwert von f auf I). Dann gilt:

$$\inf_I f(x) \leq \mu(f) \leq \sup_I f(x).$$

Falls $f \in C(I)$, dann existiert $\xi \in I$ mit $\mu(f) = f(\xi)$, d.h. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b - a)$.

10.5 Integration über Teilintervalle

Satz 10.19 *Sei $a < c < b$ und $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:*

$$f \in R([a, b]) \Leftrightarrow f \in R([a, c]) \text{ und } f \in R([c, b])$$

Es gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Definition 10.20 *Sei $a < b$ und $f \in R([a, b])$. Definiere*

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx \text{ und } \int_c^c f(x)dx = 0 \ \forall c \in [a, b].$$

Bemerkung:

a) Ist $f \in R([a, b])$, dann ist f auf jedem Intervall $[a, x]$, $a < x \leq b$ integrierbar.

b) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ gilt dann:

$$\int_\alpha^\gamma f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx$$

Satz 10.21 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

a) Sei $f \in R([a, b])$, $c \in [a, b]$ und $F(x) := \int_c^x f(t)dt$. Ist f stetig an der Stelle $\xi \in [a, b]$, so ist F differenzierbar an der Stelle ξ und es gilt $F'(\xi) = f(\xi)$. (Rekonstruktion von f durch Ableitung des Integrals)

b) Sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $F' \in R([a, b])$. Dann gilt für $x, c \in [a, b]$

$$F(x) = F(c) + \int_c^x F'(t)dt$$

(Rekonstruktion von F durch die Integration der Ableitung)

Praktische Bedeutung:

a) Gesucht ist die Lösung der "Differentialgleichung" $u'(t) = a(t)u(t)$ mit der "Anfangsbedingung" $u(0) = 1$. Dabei sei $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

   Idee: $u(t) := e^{A(t)}$. Dann muss gelten $A'(t) = a(t),\ A(0) = 0$. Also: $A(t) = \displaystyle\int_0^t a(s)ds$.

   Die Lösung der Differentialgleichung ist dann: $u(t) = e^{\int_0^t a(s)ds}$

b) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan b - \arctan a$, denn $\Big(\arctan x\Big)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

10.6 Integrationstechniken

Definition 10.22 *Gegeben sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$. Eine differenzierbare Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$ heißt Stammfunktion von f.*

Bemerkungen:

a) Der 1.Hauptsatz besagt: stetige Funktion auf kompakten Intervallen besitzen Stammfunktionen, nämlich z.B.

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt\ , x \in [a, b].$$

b) Jede weitere Stammfunktion unterscheidet sich von F nur um eine Konstante.

c) Schreibweise für Stammfunktionen: $F(x) = \displaystyle\int f(x)dx$. Die Schreibweise ist nicht ganz eindeutig, denn sie „vergisst “auf welchem Intervall die Stammfunktion von f gebildet wird.

d) Falls f eine Stammfunktion F besitzt und $f \in R(I)$, dann gilt wegen des 2. Hauptsatzes

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Liste der Grundintegrale

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} \text{ für } \begin{cases} x > 0, & \alpha \neq -1 \\ x \in \mathbb{R}, & \alpha \in \mathbb{N}_0 \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, & \alpha \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\} \end{cases}, \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x|, x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \begin{cases} \operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} & x \in (-1,1) \\ \operatorname{Arcoth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x,\ |x| < 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \operatorname{Arsinh} x = \ln(x+\sqrt{1+x^2}), x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|,\ |x| > 1$$

$$\int e^x dx = e^x,\ \int \sin x\, dx = -\cos x,\ \int \cos x\, dx = \sin x$$

$$\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x|,\ \int \cot x\, dx = \ln|\sin x|$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x,\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$$

Partielle Integration

Seien $f, g \in C^1(J)$. Dann gilt:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Für $a, b \in J$ gilt:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Satz 10.23 (Substitutionsregel) *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $f \in C(J), \Phi \in C^1(I)$ und $\Phi(I) \subset J$.*

a) Für $a, b \in J$ gilt dann:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\Phi(t))\Phi'(t)dt, \ a = \Phi(\alpha), \ b = \Phi(\beta).$$

b) Ist Φ streng monoton so gilt für $x \in J$:

$$\int f(x)dx = \int f(\Phi(t))\Phi'(t)dt\Big|_{t=\Phi^{-1}(x)}.$$

Beweis: Setze $F(x) := \int f(x)\,dx$, d.h. F sei Stammfunktion von f. Dann ist $F(\Phi(t))$ Stammfunktion von $f(\Phi(t))\Phi'(t)$.

a) folgt wegen $F(x)|_a^b = F(\Phi(t))|_\alpha^\beta$.

b) folgt wegen $F(\Phi(t))\Big|_{t=\Phi^{-1}(x)} = F(x)$.

■

Beispiele:

a) Zur Berechnung von $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$ verwende folgenden Trick:

$$\Phi(t) = 2\arctan(t); \ "x = 2\arctan(t)"; \ "dx = \frac{2}{1+t^2}dt";$$
$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\Phi'(t)dt}{\sin\Phi(t)} = \int \frac{2(1+t^2)}{(1+t^2)2t}dt = \ln|t| = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$$

10.7 Integration rationaler Funktionen

Satz 10.24 (Partialbruchzerlegung)

Seien P, Q reelle Polynome und

$Q(x) = (x-\xi_1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (x-\xi_k)^{p_k} \cdot (x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{r_l}$.

Dann hat die rationale Funktion $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ die Darstellung (Partialbruchzerlegung):

$$R(x) = P_0(x) + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{a_{i1}}{x-\xi_i} + \ldots + \frac{a_{ip_i}}{(x-\xi_i)^{p_i}} \right) + \sum_{j=1}^{l} \left(\frac{b_{j1}x + c_{j1}}{x^2+\alpha_j x+\beta_j} + \ldots + \frac{b_{jr_j}x + c_{jr_j}}{(x^2+\alpha_j x+\beta_j)^{r_j}} \right)$$

mit $a_{ip},\ b_{jr},\ c_{jr} \in \mathbb{R}$ und einem reellen Polynom P_0.

Folgerung: Rationale Funktionen, bei denen die Nennerfaktorisierung bekannt ist, haben explizite Stammfunktionen. Gemäß Satz 10.24 treten nur Stammfunktionen von Summanden der folgenden Form auf:

$\dfrac{1}{(x-\xi)^m};\ \dfrac{bx+c}{(x^2+\alpha x+\beta)^m}$ mit $\alpha^2 < 4\beta$ (ansonsten hätte $(x^2+\alpha x+\beta)$ 2 reelle Nullstellen)

$$\int \frac{dx}{(x-\xi)^m} = \begin{cases} \ln|x-\xi| & ,\ m=1 \\ \frac{1}{(1-m)} \frac{1}{(x-\xi)^{m-1}} & ,\ m \geq 2 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+\alpha x+\beta} = \frac{2}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}} \arctan\Big(\frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}} \Big)$$

$$\int \frac{xdx}{x^2+\alpha x+\beta} = \frac{1}{2}\ln(x^2+\alpha x+\beta) - \frac{\alpha}{2} \int \frac{dx}{x^2+\alpha x+\beta}$$

$m \geq 2:$

$$\int \frac{dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^m} = \frac{2x+\alpha}{(m-1)(4\beta-\alpha^2)(x^2+\alpha x+\beta)^{m-1}} + \frac{2(2m-3)}{(m-1)(4\beta-\alpha^2)} \int \frac{dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^{m-1}}$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2+\alpha x+\beta)^m} = \frac{-1}{2(m-1)(x^2+\alpha x+\beta)^{m-1}} - \frac{\alpha}{2} \int \frac{dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^m}$$

(Verifizierung durch Differentiation)

10.8 Taylor-Reihe, Taylor-Polynom

Beobachtung:

$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ für $|x-a| < r$

Dann gilt: $f(a) = a_0,\ f'(a) = a_1,\ f''(a) = 2a_2, \ldots,\ f^{(k)}(a) = k!a_k$,

d.h. $\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (1)}$

Frage: Falls $f : (a-r, a+r) \to \mathbb{R}$ ∞-oft differenzierbar ist, gilt dann (1)?

Definition 10.25 *Sei $r > 0$ und $f : (a-r, a+r) \to \mathbb{R}$.*

a) Ist f ∞-oft differenzierbar, dann heißt $T(x,a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ Taylor-Reihe von f im Punkt a.

b) Ist $k \in \mathbb{N}_0$ und f k-mal differenzierbar, so heißt $T_k(x,a) := \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ k-tes Taylor-Polynom von f im Punkt a.

Satz 10.26 (Satz von Taylor) *Sei $a \in I,\ f \in C^{n+1}(I)$. Dann gilt für alle $x \in I$:*

$$f(x) = T_n(x,a) + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt}_{\textit{Restglied } R_n(x,a)}$$

Es existiert ξ zwischen a und x mit:

$$R_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \text{ (Lagrange-Form des Restglieds)}$$

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$. Wir beginnen mit $n = 0$. In diesem Fall ist die Aussage des Satzes

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$

gerade die Aussage des 1. Hauptsatzes. Wir zeigen als Nächstes den Induktionsschluß von n auf $n+1$. Für $x, t \in I$ definiere

$$F(t) := \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t).$$

Dann gilt

$$F'(t) = \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t).$$

Integration $\int_a^x \ldots\, dt$ dieser Beziehung liefert

$$\underbrace{F(x)}_{=0} - F(a) = R_{n+1}(x;a) - R_n(x;a)$$

und es folgt mit der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n(x;a) + R_n(x;a) \\ &= T_n(x;a) + F(a) + R_{n+1}(x;a) \\ &= T_{n+1}(x;a) + R_{n+1}(x;a). \end{aligned}$$

Um die Lagrange-Form des Restgliedes herzuleiten, erinnern wir an den verallgemeinerten Mittelwertsatz (vgl. Satz 9.13) für Funktionen F, G mit $F(a) = G(a) = 0$:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \text{ für ein } \xi \in (a, x).$$

Ist sogar $F'(a) = G'(a) = 0$, so folgt nach erneuter Anwendung des verallgemeinerten Mittelwertsatzes

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F''(\xi_1)}{G''(\xi_1)} \text{ für ein } \xi_1 \in (a, \xi).$$

Allgemeiner läßt sich sagen

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{G^{(n+1)}(\xi)} \text{ für ein } \xi \in (a,x) \text{ falls } F^{(k)}(a) = G^{(k)}(a) = 0 \text{ für } k = 0, \ldots, n.$$

Diese Überlegung wenden wir nun an für $F(x) := f(x) - T_n(x;a)$ und $G(x) := (x-a)^{n+1}$. Für diese Funktionen gilt $F^{(k)}(a) = 0, G^{(k)}(a) = 0$ für $k = 0, \ldots, n$ und $F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ sowie $G^{(n+1)}(x) = (n+1)!$. Somit erhalten wir

$$R_n(x;a) = F(x) = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{G^{(n+1)}(\xi)} G(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Dies ist gerade die behauptete Lagrange-Form des Restgliedes. ■

Satz 10.27 (Taylor-Entwicklung von Funktionen)

Sei $f \in C^\infty(I)$ und $a \in I$. Falls $R_n(x,a) \to 0$ für $n \to \infty$, dann gilt $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.
Dies ist z.B. der Fall, wenn Zahlen $\alpha, C > 0$ existieren mit $\left|f^{(n)}(t)\right| \leq \alpha C^n \ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I$.

Beweis: Hat man die Abschätzungen für $|f^{(n)}(t)|$ so kann man das n-te Restglied wie folgt abschätzen

$$|R_n(x;a)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}|f^{(n+1)}(\xi)| \leq \frac{\alpha C^{n+1}}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

■

Beispiele:

a) $f(x) = e^x,\ a = 0,\ f^{(n)}(t) = e^t$

Für $t \in [-L, L],\ |f^{(n)}(t)| \leq e^L. \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

Es gilt: $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Insbesondere ist f ∞-oft differenzierbar an der Stelle $x = 0$ mit $f^{(n)}(0) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$. Folglich gilt für die Taylor-Reihe $T(x,0) \equiv 0$, d.h. f wird nicht durch seine Taylor-Reihe $T(x,0)$ dargestellt.

10.9 Vertauschung von Integration/Differentiation mit Limesbildung

Satz 10.28 *Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Funktionen aus $R([a,b])$. Falls $f_n \overset{n\to\infty}{\to} f$ gleichmäßig auf $[a,b]$ konvergiert, dann ist $f \in R([a,b])$ und es gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Korollar 10.29 *Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Funktionen aus $R([a,b])$. Falls $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ gleichmäßig auf $[a,b]$ konvergiert, so gilt:*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

Beispiel:

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \dfrac{1}{1+x}$ konvergiert gleichmäßig für $0 \leq |x| \leq \rho$, falls $0 < \rho < 1$. Daraus folgt

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{ds}{1+s} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n s^n ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}, \ |x| < 1,$$

d.h. hier wurde gerade die Potenzreihendarstellung des Logarithmus hergeleitet.

Satz 10.30 (Vertauschung von Ableitung und Limes)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall und $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Funktionen in $C^1(I)$. Falls $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ punktweise auf I konvergiert und $f_n' \underset{n\to\infty}{\to} g$ gleichmäßig auf I konvergiert, dann ist $f \in C^1(I)$ und $f' = g$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x).$$

Korollar 10.31

a) Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $C^1(I)$. Falls $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ punktweise auf I konvergiert und die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ gleichmäßig auf I konvergiert, dann ist $f \in C^1(I)$ und es gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \ \forall x \in I.$$

b) Sei $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist $f \in C^1(-r,r)$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ und der Konvergenzradius der differenzierten Reihe ist gleich r. Gleiches gilt für höhere Ableitungen beliebiger Ordnung.

10.10 Uneigentliche Integrale

Beispiele:

a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty} -e^{-x}|_0^t = 1$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0+}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0+} 2\sqrt{x}|_t^1 = 2$

Definition 10.32 *Die Funktion $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ sei auf jedem Intervall $[a,c],\ c>a$ integrierbar. Man definiert*

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)dx,$$

falls dieser Limes existiert. In diesem Fall heißt $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ konvergent.

Bemerkungen:

a) $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$

b) $\displaystyle\int_a^\infty \Big(\alpha f(x)+\beta g(x)\Big)dx = \alpha\int_a^\infty f(x)dx + \beta\int_a^\infty g(x)dx$

c) $\displaystyle F(c) := \int_a^c f(t)dt$. Falls das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ konvergiert, so gilt

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{c\to\infty} F(c).$$

Lemma 10.33 (Konvergenzkriterien) *Seien $f,g\in R([a,c])\ \forall c>a$.*

a) Aus $|f(x)|\le g(x)$ und $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ konvergent folgt, daß $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ konvergent ist.

b) Sei $p\in\mathbb{Z}$ und $f:[p,\infty)\to\mathbb{R}$ nicht-negativ, monoton fallend. Dann gilt:

$$\int_p^\infty f(x)dx \text{ konvergent } \Leftrightarrow \sum_{n=p}^\infty f(n) \text{ konvergent}$$

Beispiel:

$\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ konvergiert, da $\sum_{n=0}^\infty e^{-n^2}$ konvergiert (Wurzelkriterium).

Bemerkung:

$\int_{-\infty}^a f(x)dx := \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)dx$, falls der Limes existiert.

$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$,

falls beide Integrale auf der rechten Seite konvergieren. In diesem Fall hängt die rechte Seite nicht von der Wahl von a ab.

Definition 10.34 *Sei $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ unbeschränkt bei a, beschränkt und integrierbar auf $[c,b]$ für alle $c \in (a,b)$. Man definiert:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)dx,$$

falls der Limes existiert. In diesem Fall heißt $\int_a^b f(x)dx$ konvergent.

Analog: *Sei $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ bei b unbeschränkt, $f \in R([a,c])\ \forall c \in (a,b)$. Man definiert:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)dx,$$

falls der Limes existiert.

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ bei a und b unbeschränkt, $f \in R([c_1,c_2])\ \forall a < c_1 < c_2 < b$. Man definiert:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

falls die beiden rechten Integrale konvergieren. In diesem Fall hängt die rechte Seite nicht von der Wahl von c ab.

Beispiel:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha},\ \alpha > 0$$

$$\alpha \neq 1: \ \int_\epsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}}\Big|_\epsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha}\Big(1 - \frac{1}{\epsilon^{\alpha-1}}\Big) \overset{\epsilon \to 0}{\to} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & ,\ 0 < \alpha < 1 \\ \infty & ,\ \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\alpha = 1: \ \int_\epsilon^1 \frac{dx}{x} = \ln 1 - \ln \epsilon \overset{\epsilon \to 0}{\to} \infty$$

Index

e, 26
überabzählbar, 12

Abbildung, 4
Ableitung, 59
Ableitung der Umkehrfunktion, 61
Ableitungsfunktion, 60
Absolute Konvergenz, 31
abzählbar, 12
Additionstheoreme, 47, 58
allgemeine Exponentialfunktion, 24
allgemeine Potenzfunktion, 23, 24
Alternierende Reihen, 30
Arcusfunktionen, 48
Areafunktionen, 49
arithmetisches Mittel, 18

Bernoullische Ungleichung, 11
bestimmte Divergenz, 23
Binomialkoeffizient, 13
Binomischer Satz, 14

Cauchy-Folge, 27
Cauchy-Produkt, 35
Cauchykriterium für Reihen, 31
Cosinus, 47
Cotangens, 48

Differenzierbarkeit, 59
Doppelfolge, 34
Doppelreihe, 34
Doppelreihen, 34
Dreiecksungleichung, 73

Eulersche Zahl e, 26
Exponentialfunktion, 23
Exponentialreihe, 46

Feinheitsmaß, 65
Folgenkriterium, 39
Fundamentalsatz der Algebra, 16, 51
Funktion, 4

Ganze Zahlen, 11
geometrische Reihe, 28
geometrisches Mittel, 18
gleichmächtig, 12
gleichmäßige Konvergenz, 44
Gleichmäßige Stetigkeit, 41

Häufungspunkt, 37
Häufungswert, 26
höchstens abzählbar, 12
harmonische Reihe, 28
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 74
Hyperbelfunktionen, 48

Identitätssatz, 16
induktive Menge, 10
Infimum, 8
isolierter Punkt, 37

Kettenregel, 61
Komplexe Exponentialfunktion, 56
komplexe Hyperbelfunktionen, 58
komplexe trigonometrische Funktionen, 56
Komplexe Zahlen, 50
Komposition stetiger Funktionen, 40
Konvergenz, 20
Konvergenzkriterium von Cauchy, 40
Konvergenzradius, 46

Lagrange-Restglied, 79
Leibnizkriterium, 30
limes inferior, 27
limes superior, 27
Lipschitz-Bedingung, 17
Lipschitz-Stetigkeit, 38
Logarithmus, 23, 25

Majorantenkriterium, 30
Maximum, 8
Menge der natürlichen Zahlen, 10
Minimum, 8
Minorantenkriterium, 30
Mittelwertsatz, 62
Mittelwertsatz der Integralrechnung, 73
monoton fallend, 17
monoton wachsend, 17

n-te Wurzel, 18
Natürliche Zahlen, 10
Nullfolge, 20
Nullstellensatz, 16, 41

obere Schranke, 7
oberes Riemannsches Integral, 67
Obersumme, 65

Partialbruchzerlegung, 78
Partielle Integration, 76
Pascalsches Dreieck, 13
Polynom, 15
Potenzreihe, 44
Produktreihe, 35

Quotientenkriterium, 32

Rationale Zahlen, 11
Realisierung der Doppelreihe, 34
Reelle Zahlen, 6
Regel von Bernoulli-L'Hospital, 63
Reihen, 28
Reihenreste, 29
Riemann-integrierbar, 67
Riemannsche Zwischensumme, 70
Riemannsches Integral, 65

Sandwich-Theorem, 22
Satz über die Umkehrfunktion, 18
Satz von Bolzano-Weierstraß, 27
Satz von Rolle, 62
Satz von Taylor, 79
Sinus, 47
Stammfunktion, 75
stetig, 37
streng monoton fallend, 17
streng monoton wachsend, 17
Substitutionsregel, 77
Supremum, 8

Tangens, 48
Taylor-Entwicklung, 81
Taylor-Polynom, 79
Taylor-Reihe, 79
Teilfolgen, 22

Umkehrfunktion, 5
Umordnungen, 22
Uneigentliche Integrale, 83
uneigentlicher Grenzwert, 43
unendliche Reihe, 28
untere Schranke, 7
unteres Riemannsches Integral, 67
Untersumme, 65

Verallgemeinerter Mittelwertsatz, 62
verdichtete Reihe, 33
Verdichtungssatz von Cauchy, 33
Verfeinerung, 65

Vielfachheit, 16
Vollständigkeitsaxiom, 8

Wurzelkriterium, 31

Zahlenfolge, 20
Zerlegung, 65
Zerlegungsnullfolge, 67
Zwischenwertsatz, 41