Analysis 2 - Kurzskript

Prof. Dr. Wolfgang Reichel

Sommersemester 2013

– In LaTeX gesetzt von Norman Weik –

Liebe Studierende der Vorlesung Analysis 2,

die Vorlesung Analysis 2 ist eine Fortsetzung der Vorlesung Analysis 1 des zurückliegenden Wintersemesters. In diesem Kurzskript finden Sie alle Sätze, Hilfssätze, Definitionen und Aussagen der Vorlesung. Beweise, Rechnungen, Kommentare und Erläuterungen, die in der Vorlesung dargestellt werden, finden Sie hier nicht. Für Hinweise auf Fehler – gerne auch per mail an `wolfgang.reichel@kit.edu` – bin ich stets dankbar.

Inhaltsverzeichnis

1 $\mathbb{R}^n$, topologische Grundbegriffe, Banachräume

1.1 $\mathbb{R}^n$ als euklidischer Raum

Definition 1.1 *Wir betrachten die Menge* $\mathbb{R}^n = \Big\{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\Big\}$. *Für* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$ *definieren wir:*

a) *Addition:* $x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

b) *Skalarmultiplikation:* $\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$

c) *Skalarprodukt:* $\langle x, y\rangle := \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ *(oft wir dies geschrieben als:* $x \cdot y = \langle x, y\rangle$*)*

d) *Euklidische Norm:* $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots x_n^2}$. $\|x - y\|$ *heisst euklidischer Abstand von* x *und* y.

Bemerkung:

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt euklidischer Vektorraum.

Lemma 1.2 *Es gilt* $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ *und für alle* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*:*

a) $\|x\| > 0$ *für* $x \neq 0$

b) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

d) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

e) $\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$

f) $\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x - y\|$

g) $\langle \lambda \cdot x + \mu \cdot y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \ \mu\langle y, z\rangle$

h) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

i) *Mit den Vektoren* $e_i := (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots, 0)$, $i = 1, \dots, n$ *bezeichnen wir die Standardbasis des* $\mathbb{R}^n$. *Dann gilt* $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$.

j) $|x_i| \leq \|x\| \leq \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| \quad (i = 1, \dots, n)$

1.2 Konvergenz von Folgen im $\mathbb{R}^n$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $x^k \in \mathbb{R}^n$. $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt Folge (von Vektoren) im $\mathbb{R}^n$.

Beachte die Notation: $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$. Schreibt man x_i^k, so ist der *obere* Index k der Folgenindex, während der *untere* Index $i \in \{1, \dots, n\}$ sich auf die i-te Koordinate des Vektors x^k bezieht.

Definition 1.3 *Eine Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt*

a) beschränkt, falls $M > 0$ existiert mit $\|x^k\| \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

b) konvergent, falls $a \in \mathbb{R}^n$ existiert mit $\lim\limits_{k\to\infty} \|x^k - a\| = 0$. (Schreibweise: $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = a$)

c) Cauchy-Folge, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein Index $N = N(\epsilon)$ existiert, so dass gilt:

$$\text{aus } k, l \geq N \text{ folgt } \|x^k - x^l\| < \epsilon.$$

Satz 1.4 *Sei $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:*

a) $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\Leftrightarrow$ jede der Koordinatenfolgen $(x_1^k)_{k\in\mathbb{N}}, \dots, (x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

b) $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge $\Leftrightarrow$ jede der Koordinatenfolgen $(x_1^k)_{k\in\mathbb{N}}, \dots, (x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge.

Korollar 1.5

Sei $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$(x^k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergent } \Leftrightarrow (x^k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchy-Folge.}$$

Weiterhin gilt:

a) Jede konvergente Folge hat genau einen Grenzwert und ist beschränkt.

b) Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

1.3 Kugel, Sphäre, Umgebung

Definition 1.6 *Sei $a \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$. Dann heißt:*

$B_r(a) := \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\Big\}$ *offene Kugel mit Mittelpunkt a und Radius r*

$\overline{B_r(a)} := \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\Big\}$ *abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt a und Radius r*

$S_r(a) := \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| = r\Big\}$ *Sphäre mit Mittelpunkt a und Radius r*

Definition 1.7

Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$\operatorname{diam} M := \sup \Big\{\|x - y\| : x, y \in M\Big\}$$

Durchmesser von M. Setze $\operatorname{diam} \emptyset = 0$. *Eine nichtleere Menge M heißt beschränkt, falls* $\operatorname{diam} M < \infty$.

Bemerkung:

M ist beschränkt $\Leftrightarrow \exists$ Kugel $B_r(a)$ mit $M \subset B_r(a)$.

Definition 1.8 *Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt Umgebung von a, falls $\epsilon > 0$ existiert mit $B_\epsilon(a) \subset U$.*

1.4 Innere Punkte, Randpunkte, Häufungspunkte

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $A^C := \mathbb{R}^n \setminus A$.

Definition 1.9 *Sei $A \in \mathbb{R}^n$. Ein Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ heißt:*

a) innerer Punkt von A, falls $\epsilon > 0$ existiert mit $B_\epsilon(a) \subset A$. Dies ist gleichbedeutend damit, dass A Umgebung von a ist.

b) Randpunkt von A, falls für jedes $\epsilon > 0$ gilt: $B_\epsilon(a) \cap A \neq \emptyset$ und $B_\epsilon(a) \cap A^C \neq \emptyset$.

c) Häufungspunkt von A, falls für jedes $\epsilon > 0$ die Kugel $B_\epsilon(a)$ unendlich viele Punkte von A enthält.

Definiere:

$A^o = \Big\{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ ist innerer Punkt von } A\Big\}$ „*Inneres von A*"

$\partial A = \Big\{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ ist Randpunkt von } A\Big\}$ „*Rand von A*"

$\overline{A} = A \cup \partial A$ „*abgeschlossene Hülle von A*"

$H(A) = \Big\{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ ist Häufungspunkt von } A\Big\}$ „*die Menge der Häufungspunkte von A*"

Lemma 1.10 *Sie $A \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt:*

a) $A^o \subset A \subset \overline{A}$

b) $\mathbb{R}^n = \underbrace{A^o \cup (A^C)^o \cup \partial A}_{\textit{disjunkt}}$

c) $\overline{A} = A \cup \partial A = A^o \cup \partial A$

d) $(A^C)^o = (\overline{A})^C$

1.5 Offene und abgeschlossene Mengen

Definition 1.11 *Sei $A \in \mathbb{R}^n$.*

a) A heißt offen, falls $A = A^o$.

b) A heißt abgeschlossen, falls A^C offen ist.

Bemerkungen:

a) $\emptyset$ ist offen, denn $\emptyset^o = \emptyset$.

$\emptyset$ ist abgeschlossen, denn $\emptyset^C = \mathbb{R}^n$ ist offen

analog: $\mathbb{R}^n$ ist sowohl offen als auch abgeschlossen

b) Sei $A := (0, 1] \subset \mathbb{R}$. A ist weder offen noch abgeschlossen.

Satz 1.12 *Sie $l \in \mathbb{N}$ und I eine Indexmenge.*

a) *Die Mengen $A_\alpha \subset \mathbb{R}^n,\ \alpha \in I$ seien offen. Dann ist $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ ist offen.*

b) *Die Mengen $A_1, \ldots, A_l \subset \mathbb{R}^n$ seien offen. Dann ist $\bigcap\limits_{i=1}^{l} A_i$ ist offen.*

c) *Die Mengen $A_\alpha \subset \mathbb{R}^n,\ \alpha \in I$ seien abgeschlossen. Dann ist $\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ ist abgeschlossen.*

d) *Die Mengen $A_1, \ldots, A_l \subset \mathbb{R}^n$ seien abgeschlossen. Dann ist $\bigcup\limits_{i=1}^{l} A_i$ ist abgeschlossen.*

Bemerkung:

$A_k := (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \subset \mathbb{R}$ ist offen. $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \{0\}$ ist abgeschlossen.

$A_k := [-1 + \frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}] \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen. $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = (-1, 1)$ ist offen.

Satz 1.13 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist A^o offen und $\overline{A},\ \partial A$ sind abgeschlossen.*

Satz 1.14

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $H(A) =$ die Menge der Häufungspunkte von A und

$$L(A) := \Big\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists \text{ Folge } (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ in } A \text{ mit } \lim_{k \to \infty} a_k = x \Big\}.$$

Dann gilt

$$\overline{A} = L(A) = A \cup H(A).$$

Korollar 1.15 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

(i) *A ist abgeschlossen*

(ii) *$H(A) \subset A$*

(iii) *Für jede konvergente Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in A gilt $\lim\limits_{k \to \infty} x_k \in A$.*

1.6 Banachräume und Kontraktionsprinzip

Definition 1.16

Sei X ein reeller Vektorraum und $N : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung (schreibe $\|x\| = N(x)$) mit folgenden Eigenschaften. $\forall x, y \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(N1) $\|x\| \geq 0$ *und* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Dann heißt N Norm auf X und $(X, \|\cdot\|)$ heißt normierter Raum.

Bemerkung:

Für eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X können die Begriffe *beschränkt*, *konvergent*, *Cauchy-Folge* wörtlich wie in Definition 1.3 erklärt werden. Die Definitionen aus den Abschnitten 1.3, 1.4, 1.5 können wörtlich auf normierte Räume übertragen werden.

Ausgenommen von der wörtlichen Übertragung sind Satz 1.4 und Korollar 1.5, da dort die Koordinaten bzgl. einer Basis ebenso wie die Endlichkeit der Dimension von $\mathbb{R}^n$ benutzt werden.

Beispiele von normierten Räumen:

(1) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ist ein normierter Raum.

(2) Sei $C([a, b])$ die Menge auf dem Intervall $[a, b]$ stetigen Funktionen. Für $f \in C([a, b])$ wird durch $\|f\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ eine Norm erklärt.

(3) Auf $C([a, b])$ wird durch $\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\, dx$ ebenfalls eine Norm erklärt.

Definition 1.17

Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Falls jede Cauchy-Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert

$x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k \in X$ *besitzt, dann heißt $(X, \|\cdot\|)$ vollständig bzw. Banachraum.*

Beispiele:

(1) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

(2) $(C([a, b], \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum (Beweis erfolgt in Satz 1.19).

(3) $(C([a, b], \|\cdot\|_1)$ ist ein Beispiel für einen normierten Raum, der kein Banachraum ist.

Satz 1.18 (Kontraktionsprinzip, Banachscher Fixpunktsatz)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $A \subset X$ eine abgeschlossene, nichtleere Teilmenge und $f : A \to A$ eine Abbildung. Falls eine Konstante $q \in [0, 1)$ existiert, so dass die Bedingung

$$\|f(x) - f(y)\| \leq q\|x - y\| \ \forall x, y \in A$$

erfüllt ist, so gilt:

i) Es existiert genau ein $x^* \in A$ mit $f(x^*) = x^*$ (x^* ist Fixpunkt).

ii) Ist $x_0 \in A$ beliebig und wird die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definiert durch $x_{k+1} = f(x_k),\ k \in \mathbb{N}_0$, so konvergiert x_k gegen x^*.

iii) Es gelten für alle $k \in \mathbb{N}$ die Abschätzungen:

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{1}{1-q}\|x_{k+1} - x_k\| \leq \frac{q^k}{1-q}\|x_1 - x_0\|$$

Bemerkung:

Eine Abbildung mit den Eigenschaften wie in Satz 1.18 nennt man Kontraktion.

Beispiele für Kontraktionen:

i) $(X, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}, |\cdot|),\ A = \mathbb{R},\ f(x) := \frac{1}{4}e^{-x^2}$

ii) $(X, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|),\ A = \mathbb{R}^2,\ f(x) := \left(\frac{1}{8}e^{-x_2^2}, \dfrac{1}{4(1+x_1^2)}\right)$

Satz 1.19

i) Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C([a, b])$ und $f \in C([a, b])$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\|f_k - f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow (f_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gleichmäßig auf } [a, b] \text{ gegen } f$$

ii) $\Big(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty\Big)$ ist Banachraum.

2 Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit

Im Folgenden seien stets $n, m \in \mathbb{N}$ und $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion.

2.1 Definitionen

Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$. Mit $\dot{B}_r(\xi) = B_r(\xi) \setminus \{\xi\}$ bezeichnen wir eine "punktierte Kugel".

Definition 2.1 (Grenzwert)

Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion und $\xi \in \mathbb{R}^n$ Häufungspunkt von D. Man sagt: f strebt gegen $\eta \in \mathbb{R}^m$ für $x \to \xi$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ exisitert mit:

$$x \in D \cap \dot{B}_\delta(\xi) \Rightarrow \|f(x) - \eta\| < \epsilon$$

In Symbolen: $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = \eta$ oder $f(x) \to \eta$ für $x \to \xi$.

Definition 2.2 (Stetigkeit)

Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion und $\xi \in D$. f heißt stetig an der Stelle ξ, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit:

$$x \in D \cap B_\delta(\xi) \Rightarrow \|f(x) - f(\xi)\| < \epsilon.$$

Bemerkung:

a) f heißt stetig auf D, falls f in jedem Punkt $\xi \in D$ stetig ist. Man schreibt $f \in C(D)$.

b) Sei $\xi \in D$ Häufungspunkt. Dann gilt: f ist stetig in $\xi \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$.

Definition 2.3 (Lipschitz-Stetigkeit)

$f : D \to \mathbb{R}^m$ heißt Lipschitz-stetig auf D (kurz: $f \in \mathrm{Lip}(D)$), falls $L > 0$ existiert mit:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \ \forall x, y \in D.$$

Beachte: $\mathrm{Lip}(D) \subset C(D)$

Definition 2.4 (Gleichmäßige Stetigkeit) *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ heißt gleichmäßig stetig auf D, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit:*

$$\|x - y\| \leq \delta, \quad x, y \in D \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon$$

Satz 2.5 (Folgenkriterium) *Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion.*

a) $\xi \in \mathbb{R}^n$ sei Häufungspunkt von D. Dann gilt:

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = \eta \Leftrightarrow \forall \text{ Folgen } (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ in } D \setminus \{\xi\} \text{ mit } \lim_{k \to \infty} x_k = \xi \text{ gilt } \lim_{k \to \infty} f(x_k) = \eta$$

b) f ist stetig in $\xi \in D \Leftrightarrow \forall$ Folgen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in D mit $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = \xi$ gilt $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = f(\xi)$

2.2 Beispiele stetiger Funktionen

Definition 2.6

Gegeben sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$. Dann ist für jedes $x \in D$ der Funktionswert $f(x)$ von der Form $f(x) = \Big(f_1(x), \dots, f_m(x)\Big)$. Für $i = 1, \dots, m$ heißt

$$f_i : \begin{cases} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_i(x) \end{cases} \qquad i\text{-te Koordinatenfunktion.}$$

Satz 2.7 *$f : D \to \mathbb{R}^m$ ist stetig $\Leftrightarrow$ jede Koordinatenfunktion $f_1, \dots, f_m : D \to \mathbb{R}$ ist stetig.*

Satz 2.8 *$f, g : D \to \mathbb{R}^m$ seien stetig.*

a) Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\lambda f + \mu g$ stetig.

b) Sei $m = 1$. Die Funktionen $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (falls $g \neq 0$), $|f|, f^+, f^-, \max\{f, g\}, \min\{f, g\}$ sind stetig.

c) Es sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig und $g : f(D) \to \mathbb{R}^l$ stetig. Dann ist $h = g \circ f : D \to \mathbb{R}^l$ stetig.

2.3 Äquivalente Beschreibung der Stetigkeit (weggelassen)

Definition 2.9

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Eine Menge $M \subset D$ heißt

a) relativ offen in D, falls eine offene Menge $O \subset \mathbb{R}^n$ existiert mit $M = D \cap O$.

b) relativ abgeschlossen in D, falls eine abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ existiert mit $M = D \cap A$.

Satz 2.10

Gegeben sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$. Dann gilt:

$$f \text{ ist stetig auf } D \Leftrightarrow \forall \text{ offene Mengen } V \subset \mathbb{R}^m \text{ ist } f^{-1}(V) \text{ relativ offen in } D.$$

2.4 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen

Definition 2.11 *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heisst kompakt, falls jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in M einen Häufungspunkt in M besitzt.(Äquivalent: ..., falls jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit Grenzwert $x \in M$ besitzt.)*

Satz 2.12 *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt:*

$$M \text{ kompakt } \Leftrightarrow M \text{ ist beschränkt und abgeschlossen}$$

Satz 2.13

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann ist $f(D)$ kompakt.

Korollar 2.14

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, nichtleer und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann $\exists x_*, x^*$ mit $f(x_*) = \inf\limits_D f$ und $f(x^*) = \sup\limits_D f$. D.h. die Funktion f nimmt auf der kompakten Menge D ihr Minimum in x_* und ihr Maximum in x^* an.

Satz 2.15

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig auf D, d.h. zu $\epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$:

$$x, y \in D,\ \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon.$$

Satz 2.16 (Satz über die Umkehrfunktion (weggelassen))

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig und injektiv. Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to D$ und sie ist stetig.

2.5 Folgen stetiger Funktionen, der Banachraum $(C(D), \|\cdot\|_\infty)$

Definition 2.17

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_k : D \to \mathbb{R}^m$ sowie $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion.

a) *f_k heißt punktweise konvergent gegen f, falls $\forall x \in D$ gilt: $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$.*

b) *f_k heißt gleichmässig konvergent gegen f, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit:*

$$k \geq k_0 \Rightarrow \|f_k(x) - f(x)\| < \epsilon \quad \forall x \in D.$$

Satz 2.18 (vgl. Ana 1 Satz 7.4)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_k : D \to \mathbb{R}^m$, die gleichmäßig auf D gegen $f : D \to \mathbb{R}^m$ konvergiert.

a) *Ist jedes f_k stetig an der Stelle $\xi \in D$, so ist f stetig an der Stelle ξ.*

b) *Ist jedes $f_k \in C(D)$, so ist $f \in C(D)$.*

Definition 2.19

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Auf dem Vektorraum $C(D) = \{f : D \to \mathbb{R}^m,\ f \text{ stetig }\}$ wird die folgende Norm eingeführt:

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in D} \|f(x)\|$$

Bemerkung:

a) Die Abbildung $x \mapsto \|f(x)\|$ ist stetig auf D.

b) Die Normeigenschaften von $\|\cdot\|_\infty$ sind leicht einsehbar.

Satz 2.20

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist $\Big(C(D), \|\cdot\|_\infty\Big)$ ein Banachraum (vgl. Satz 7.3 Ana 1 sowie Satz 1.19).

2.6 Stetige Fortsetzbarkeit (weggelassen)

Satz 2.21

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^m$ sei gleichmäßig stetig auf D. Dann existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^m$ von f auf $\overline{D}$.

Beispiele:

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ besitzt keine stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}$.

b) $D = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ hat keine stetige Fortsetzung auf $\overline{D} = \mathbb{R}^n$.

c) $D = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $f(x) = \dfrac{\sin\|x\|}{\|x\|}$ hat stetige Fortsetzung F auf $\mathbb{R}^n$, denn $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ und F ist gegeben durch

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\|x\|)}{\|x\|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

2.7 Äquivalente Normen auf $\mathbb{R}^n$ (weggelassen)

Definition 2.22

Sei X ein Vektorraum und $\|\cdot\|, |||\cdot|||$ seien zwei Normen auf X. Die beiden Normen heißen äquivalent, falls Konstanten $\alpha, \beta > 0$ existieren mit

$$\alpha\|x\| \leq |||x||| \leq \beta\|x\| \quad \text{\textit{für alle} } x \in X. \qquad (*)$$

Bemerkung:

a) Aus $(*)$ folgt $\frac{1}{\beta} ||| x||| \leq \|x\| \leq \frac{1}{\alpha} ||| x|||$.

b) Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergente Folge / Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|$, so auch bzgl. $|||\cdot|||$. Folglich besitzen $\Big(X, \|\cdot\|\Big)$, $\Big(X, |||\cdot|||\Big)$ dieselben konvergenten Folgen und es gilt:

$$\Big(X, \|\cdot\|\Big) \text{ vollständig } \Leftrightarrow \Big(X, |||\cdot|||\Big) \text{ vollständig.}$$

Satz 2.23 *Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.*

Bemerkung: Satz 2.23 gilt auch auf endlich-dimensionalen normierten Räumen.

Korollar 2.24

Auf $\mathbb{R}^n$ seien zwei Normen $\|\cdot\|, |||\cdot|||$ gegeben. Dann gilt für $A \subset \mathbb{R}^n$:

$$A \textit{ ist offen in } \Big(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|\Big) \Leftrightarrow A \textit{ ist offen in } \Big(\mathbb{R}^n, |||\cdot|||\Big)$$

$$A \textit{ ist abgeschlossen in } \Big(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|\Big) \Leftrightarrow A \textit{ ist abgeschlossen in } \Big(\mathbb{R}^n, |||\cdot|||\Big)$$

$$A \textit{ ist kompakt in } \Big(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|\Big) \Leftrightarrow A \textit{ ist kompakt in } \Big(\mathbb{R}^n, |||\cdot|||\Big)$$

Folgerung:

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Der Begriff „f ist stetig im Punkt $\xi \in D$“ ist unabhängig davon, welche Normen auf $\mathbb{R}^n$, bzw. auf $\mathbb{R}^m$ gewählt wurden.

2.8 Landau-Symbolik

Definition 2.25

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^m$, $g : D \to (0, \infty)$ seien Funktionen sowie ξ ein Häufungspunkt von D. Man sagt:

a) $f(x) = o(g(x))$ für $x \to \xi$, falls $\lim\limits_{x \to \xi} \frac{\|f(x)\|}{g(x)} = 0$.

b) $f(x) = O(g(x))$ für $x \to \xi$, falls $C \geq 0$ und eine Kugel $B_r(\xi)$ existieren mit

$$\|f(x)\| \leq Cg(x) \ \forall x \in B_r(\xi) \cap D.$$

Sprechweise: „$f(x)$ ist klein o von $g(x)$“ bzw. „$f(x)$ ist groß O von $g(x)$“ für $x \to \xi$.

Sinngemäße Varianten:

I) Ist $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}^m,\ g : D \to (0, \infty)$, so gilt:

$f(x) = o(g(x))$ für $x \to \infty$ (bzw. $-\infty$) $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\|f(x)\|}{g(x)} = 0$.

$f(x) = O(g(x))$ für $x \to \infty$ (bzw. $-\infty$) $\Leftrightarrow$ es existieren $C \geq 0,\ r > 0$ mit

$$\|f(x)\| \leq Cg(x) \quad \forall x \in D,\ x > r \ \text{(bzw. } x < -r).$$

II) $(a_k)_{k \in \mathbb{N}},\ (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ seien Folgen, $b_k > 0\ \forall k \in \mathbb{N}$.

$a_k = o(b_k)$ für $k \to \infty$ bedeutet $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = 0$.

$a_k = O(b_k)$ für $k \to \infty$ bedeutet $\exists C \geq 0, k_0 \in \mathbb{N}$: $|a_k| \leq Cb_k\ \forall k \geq k_0$.

III) $f(x) = g(x) + o(h(x))$ bedeutet $f(x) - g(x) = o(h(x))$,
$f(x) = g(x) + O(h(x))$ bedeutet $f(x) - g(x) = O(h(x))$.

3 Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen

3.1 Beispiele für reellwertige Funktionen von zwei Veränderlichen

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = xye^{x^2y}$.

Partielle Ableitung von f nach x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y) = ye^{x^2y} + 2x^2y^2e^{x^2y} \text{ (y festhalten, nach x differenzieren)}$$

Partielle Ableitung von f nach y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y(x,y) = xe^{x^2y} + x^3ye^{x^2y} \text{ (x festhalten, nach y differenzieren)}$$

Höhere partielle Ableitungen: $f_{xx} = (f_x)_x,\ f_{xy} = (f_x)_y, \ldots$:

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= (2xy^2 + 4xy^2 + 4x^3y^3)e^{x^2y},\\
f_{xy}(x,y) &= (1 + x^2y + 4x^2y + 2x^4y^2)e^{x^2y},\\
f_{yx}(x,y) &= (1 + 2x^2y + 3x^2y + 2x^4y^2)e^{x^2y},\\
f_{yy}(x,y) &= (2x^3 + x^5y)e^{x^2y},\ \text{etc ...}
\end{aligned}$$

Schreibweisen:

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\\
f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\\
f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\\
f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \text{etc ...}
\end{aligned}$$

Definition 3.1 *Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ und $f : D \to \mathbb{R}$, $(\xi, \eta) \in D$. Falls die unten stehenden Limiten formuliert werden können und existieren:*

$$f_x(\xi, \eta) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h, \eta) - f(\xi, \eta)}{h}$$

$$f_y(\xi, \eta) = \lim_{k \to 0} \frac{f(\xi, \eta + k) - f(\xi, \eta)}{k},$$

so heißt $f_x(\xi, \eta)$ bzw. $f_y(\xi, \eta)$ partielle Ableitung von f nach x bzw. y im Punkt (ξ, η).

Bemerkung:

Beide Limiten können sicher formuliert werden, wenn $(\xi, \eta) \in D^o$.

Es gibt allerdings weitere Möglichkeiten, bei denen f_x, f_y sinnvollerweise formuliert werden können. Sei z.B. $D = [a, a'] \times [b, b']$.

Für $\xi = a$, $\eta \in (b, b')$ kann der Limes $\lim\limits_{k \to 0} \frac{f(\xi, \eta + k) - f(\xi, \eta)}{k}$ fomuliert werden.

Für $\xi = a$, $\eta \in [b, b']$ kann zumindest der einseitige Limes $\lim\limits_{h \to 0+} \frac{f(\xi + h, \eta) - f(\xi, \eta)}{h}$ formuliert werden.

Satz 3.2 (Aus stetiger partieller Differenzierbarkeit folgt die Stetigkeit)
Sei $f : D \to \mathbb{R}^2$ eine Funktion und $(x_0, y_0) \in D^o$. Falls f_x, f_y in einer Umgebung von (x_0, y_0) existieren und im Punkt (x_0, y_0) stetig sind, so ist f stetig in (x_0, y_0).

Gegenbeispiel: Es genügt im obigen Satz nicht, nur die Existenz der partiellen Ableitungen im Punkt (x_0, y_0) zu fordern. Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Dann ist f ist unstetig in $(0, 0)$, denn $\lim\limits_{n \to \infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$.

Aber:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0)}{h} = 0, \qquad f_y(0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0, k)}{k} = 0$$

und für $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt:

$$f_x(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad f_y(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

d.h. f_x, f_y existieren in jedem Punkt des $\mathbb{R}^2$, sind aber unstetig in $(0, 0)$.

Satz 3.3 (Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge, Satz von Schwarz)
Es sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f, f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}$ existieren und seien stetig auf D. Dann gilt $f_{xy} = f_{yx}$.

Gegenbeispiel:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(x,y) = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\Big(\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\Big),\ (x,y) \neq (0,0)$$

$$f_x(x,y) = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\Big(\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\Big),\ (x,y) \neq (0,0)$$

$$f_x(0,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{hy}{h}\cdot\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2} = -y, \quad y \neq 0,\ \text{(stimmt auch für } y=0\text{)}$$

$$f_y(x,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(x,k)-f(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0} x\cdot\frac{x^2-k^2}{x^2+k^2} = x$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k} = -1$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = 1$$

Grund für $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$: die partiellen Ableitungen f_{xy}, f_{yx} sind unstetig in $(0,0)$.

3.2 n Veränderliche

Definition 3.4 (Partielle Ableitung reellwertiger Funktionen)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $\xi \in D$ und $j \in \{1, \dots, n\}$. Die Funktion f heißt im Punkt $\xi \in D$ partiell nach x_j differenzierbar, falls die Abbildung

$$x_j \mapsto g(x_j) = f(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, x_j, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n)$$

auf einem Intervall der Form $[\xi_j, \xi_j + \delta]$, $[\xi_j - \delta, \xi_j]$, $[\xi_j - \delta, \xi_j + \delta]$ erklärt und an der Stelle ξ_j (gegebenenfalls einseitig) differenzierbar ist.

In Zeichen:

$f_{x_j}(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi) := \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(\xi + he_j) - f(\xi)}{h}$, *wobei $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ ist.*

Existiert $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi)$ in jedem Punkt $\xi \in D$, so ist die Funktion $\frac{\partial f}{\partial x_j} : \begin{cases} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \end{cases}$ definiert.

Definition 3.5 (Gradient einer reellwertigen Funktion) *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $\xi \in D$. Falls an der Stelle ξ die partiellen Ableitungen von f nach $x_1, \dots, x_n$ existieren, dann heißt*

$$grad\ f(\xi) = \nabla f(\xi) = \Big(f_{x_1}(\xi), \dots, f_{x_n}(\xi) \Big)$$

Gradient von f an der Stelle ξ. (∇ wird „nabla“ ausgesprochen)

Beachte: *grad f ist ein Zeilenvektor*

Bemerkung: Für partielle Ableitungen gelten die üblichen Rechenregeln:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f+g) = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial g}{\partial x_j}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}(fg) = \frac{\partial f}{\partial x_j} g + f \frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

Definition 3.6 (Partielle Ableitungen vektorwertiger Funktionen)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ und $\xi \in D$. f heißt im Punkt ξ partiell nach x_j differenzierbar, falls jede Koordinatenfunktion $f_i : D \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, m)$ partiell nach x_j differenzierbar ist.

Die Matrix

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\xi) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\xi) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\xi) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} grad\ f_1(\xi) \\ \vdots \\ grad\ f_m(\xi) \end{pmatrix}$$

heißt Jacobimatrix von f an der Stelle ξ.

Im Fall $m = n$ ist $\frac{\partial f}{\partial x}(\xi)$ eine quadratische Matrix und $\det(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi))$ heißt Jacobideterminante.

> *Wir treffen die folgende Vereinbarung:*
>
> $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$ *Spaltenvektoren*
>
> $\operatorname{grad} f_i(x) := \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_n} \right)$ *Zeilenvektor*

Diese Vereinbarung ist wichtig, wenn später Produkte von Vektoren und Matrizen gebildet werden.

Definition 3.7 (Höhere partielle Ableitungen reelwertiger Funktionen)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$. Die Funktionen $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ heißen partielle Ableitungen erster Ordnung. Ist f_{x_i} nach x_j differenzierbar, dann heißt $f_{x_i x_j} = (f_{x_i})_{x_j}$ partielle Ableitung zweiter Ordnung.

Es wird folgende Schreibweise vereinbart (man beachte die Reihenfolge der Differentiationen):

$$f_{x_i x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

analog:

$$f_{x_{i_1},\dots,x_{i_k}} := (f_{x_{i_1} \dots x_{i_{k-1}}})_{x_{i_k}} \text{ heißt partielle Ableitung } k\text{-ter Ordnung.}$$

Schreibweise:

$$f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k-1}}} \right)$$

Bemerkung: Ähnlich wie in Defintion 3.6 kann man auch höhere partielle Ableitungen von Funktionen $f : D \to \mathbb{R}^m$ erklären, in dem man die höhere partielle Differenzierbarkeit der Koeffizientenfunktionen fordert.

Definition 3.8 (Die Räume $C^k(D)$, $C^k(\overline{D})$)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen.

a) *Wir betrachten zuerst den Fall $m = 1$. Sei $k \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{aligned} C^k(D) &:= \{f : D \to \mathbb{R}, \text{ alle partiellen Ableitungen der Ordnung} \le k \text{ existieren} \\ &\qquad\qquad \text{und sind stetig auf } D\}, \\ C^0(D) &:= C(D), \qquad C^\infty(D) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(D), \\ C^k(\overline{D}) &:= \{f \in C^k(D), \text{ alle partiellen Ableitungen der Ordnung} \le k \text{ haben eine stetige} \\ &\qquad\qquad \text{Fortsetzung auf } (\overline{D})\} \\ C^0(\overline{D}) &:= C(\overline{D}), \qquad C^\infty(\overline{D}) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(\overline{D}). \end{aligned}$$

b) *Nun sei $m \ge 2$, $k \in \mathbb{N}$:*

$$C^k(D) := C^k(D, \mathbb{R}^m) := \{f : D \to \mathbb{R}^m, \text{ jede Koordinatenfunktion } f_1, \dots f_m \in C^k(D)\}$$

Die restliche Bezeichungen $C^k(\overline{D}, \mathbb{R}^m)$, etc. werden sinngemäß ergänzt.

Satz 3.9 (Satz von Schwarz) *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in C^k(D)$, $k \ge 2$. Dann ist jede partielle Ableitung der Ordnung $\le k$ unabhängig von der Reihenfolge der Differentiation.*

3.3 Vollständige Differenzierbarkeit

Definition 3.10 (Vollständige Differenzierbarkeit)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ Umgebung des Punktes ξ und $f : U \to \mathbb{R}^m$. Die Funktion f heißt vollständig differenzierbar im Punkt ξ, falls eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert mit

$$f(\xi + h) - f(\xi) - L(h) = o(\|h\|) \text{ für } h \to 0.$$

Äquivalente Formulierungen der vollständigen Differenzierbarkeit sind gegeben durch:

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0, \text{ wobei } r(h) := f(\xi + h) - f(\xi) - L(h).$$

$$\text{bzw.} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

L heißt Ableitung von f an der Stelle ξ. In Zeichen: $Df(\xi) = L$

Bemerkung:

a) Im Fall $n = m = 1$ ist $L : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & f'(\xi) \cdot h \end{cases}$

b) Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass zu jeder linearen Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine $m \times n$-Matrix C existiert (Abbildungsmatrix von L) mit $L(h) = Ch$. Beachte $h,\ L(h)$ sind Spaltenvektoren.

c) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist $f : D \to \mathbb{R}^m$ in jedem Punkt von D (vollständig) differenzierbar, so heißt f (vollständig) differenzierbar auf D.

Beispiel: Wir betrachten folgendes Beispiel $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^2 y$

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) - f(x,y) =& (x+h)^2(y+k) - x^2 y = (x^2 + 2xh + h^2)(y+k) - x^2 y \\ =& x^2 k + 2xyh + 2xhk + h^2 y + h^2 k \\ =& (2xyh + x^2 k) + 2xhk + h^2 y + h^2 k = \underbrace{(2xy, x^2)}_{1\times 2-Matrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + r(h,k). \end{aligned}$$

Nun müssen wir den Term $r(h,k)$ noch abschätzen:

$$\begin{aligned} |r(h,k)| &\leq 2|x||h||k| + h^2|y| + h^2|k| \\ &\leq |x|(h^2 + k^2) + (|y|+1)h^2 \text{ falls } |k| < 1 \\ &\leq (|x| + |y| + 1)\|(h,k)\|^2. \end{aligned}$$

Also gilt $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$ und es folgt:

$$Df(x,y) = (2xy, x^2).$$

Beachte auch: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2$ d.h. es gilt: $Df(x,y) = \nabla f(x,y)$. Diese Beobachtung gilt auch im allgemeinen Fall, wie der nächste Satz zeigt.

Satz 3.11

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ Umgebung des Punktes ξ und $f : U \to \mathbb{R}^m$ an der Stelle ξ vollständig differenzierbar, dann gilt:

a) f ist stetig an der Stelle ξ

b) alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von f an der Stelle ξ existieren und es gilt:

$$Df(\xi)(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi)h$$

Beachte: links steht die vollständige Ableitung angewandt auf h und rechts steht die Jacobi-Matrix multipliziert mit h. Insbesondere gilt im Fall $m = 1$:

$$Df(\xi)(h) = \operatorname{grad} f(\xi) \cdot h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)h_i.$$

Bemerkung:
Oftmals wird zwischen der linearen Abbildung L und ihrer Abbildungsmatrix C nicht unterschieden. Daher benutzt man Satz 3.11 auch in der Form $Df(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi)$.

Beispiele:

a) $b \in \mathbb{R}^m,\ A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ f(x) = Ax + b$

$f(x+h) - f(x) = Ah$, also existiert $Df(x)$ und $= A$.

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x^2y, e^{x+y})$

Jacobi-Matrix: $\frac{\partial f}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix}$

Ist f vollständig differenzierbar? Wenn ja, so folgt mit Satz 3.11, dass notwendigerweise $Df = \frac{\partial f}{\partial(x,y)}$ gelten muss. Zum Nachweis der vollständigen Differenzierbarkeit verfahren wir also wie folgt:

$$\begin{aligned}
f(x+h,&y+k) - f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x,y)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\
&= \Big((x+h)^2(y+k) - x^2y - 2xyh - x^2k, e^{x+y+h+k} - e^{x+y} - e^{x+y}(h+k)\Big) \\
&= \Big(2xhk + h^2(y+k), e^{x+y} \cdot (e^{h+k} - 1 - h - k)\Big) \\
&=: r(h,k).
\end{aligned}$$

Und für $r(h,k)$ finden wir die folgende Abschätzung (wobei wir $|h|, |k| \leq 1$ annehmen können):

$$\begin{aligned}\|r(h,k)\| &\leq |r_1(h,k)| + |r_2(h,k)| \\ &\leq |x|(h^2+k^2) + (|y|+1)(h^2+k^2) + e^{x+y} \cdot e^{\tau} \frac{(h+k)^2}{2}\end{aligned}$$

für ein τ zwischen 0 und $h+k$ (Anwendung des Mittelwertsatzes). Es ergibt sich also folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}\|r(h,k)\| &\leq (|x|+|y|+1) \cdot \|(h,k)\|^2 + \frac{e^{x+y+2}}{2} \cdot 2(h^2+k^2) \\ &\leq \left(|x|+|y|+1+e^{x+y+2}\right) \cdot \|(h,k)\|^2.\end{aligned}$$

Also gilt $\frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} \overset{h,k\to 0}{\to} 0$ und demzufolge ist f vollständig differenzierbar.

Satz 3.12

a) *$U \subset \mathbb{R}^n$ sei eine Umgebung von ξ und $f : U \to \mathbb{R}^m$ besitze in U partielle Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ für $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$, die im Punkt ξ stetig sind. Dann ist f im Punkt ξ vollständig differenzierbar.*

b) *Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(D)$ so ist f vollständig differenzierbar in D.*

Ergänzung

Achtung: Aus der Existenz der partiellen Ableitungen in einer ganzen Umgebung von ξ folgt nicht die Differenzierbarkeit im Punkt ξ (vgl. Beispiel nach Satz 3.2):

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zwar exisiteren f_x, f_y in jedem Punkt des $\mathbb{R}^2$, aber f ist in $(0,0)$ nicht vollständig differenzierbar, da f noch nicht einmal stetig in $(0,0)$ ist.

Satz 3.13 (Kettenregel)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ *und* $V \subset \mathbb{R}^m$*, sowie* $f : \begin{cases} U & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$ *differenzierbar im Punkt* $\xi \in U^o$ *und* $g : \begin{cases} V & \rightarrow & \mathbb{R}^p \\ y & \mapsto & g(y) \end{cases}$ *differenzierbar im Punkt* $\eta = f(\xi) \in V^o$ *sowie* $f(U) \subset V$*. Dann ist die Abbildung* $h = g \circ f : \begin{cases} U & \rightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{cases}$ *differenzierbar im Punkt* ξ *und es gilt:*

$$\underbrace{\frac{\partial h}{\partial x}(\xi)}_{p\times n\text{-Matrix}} = \underbrace{\frac{\partial g}{\partial y}(\eta)}_{p\times m\text{-Matrix}} \cdot \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi)}_{m\times n\text{-Matrix}}$$

Bemerkung:

Komponentenweise gilt die Formel: $\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\xi) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(\eta) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\xi)$

Beispiele:

a) Sei $h(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \gamma(s)ds$, wobei $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sei und $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sind. Wie bezeichnen mit Γ eine Stammfunktion von γ, d.h. $\Gamma' = \gamma$. Nun definieren wir

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \big(\alpha(t), \beta(t)\big) \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & \int_u^v \gamma(s)ds = \Gamma(v) - \Gamma(u) \end{cases}$$

und finden daher die Darstellung

$$h(t) = g(f(t)).$$

Berechnen wir zuerst die Jacobi-Matrizen von f und g so erhalten wir

$$Df(t) = \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix}, \quad Dg(u, v) = \big(-\gamma(u), \gamma(v)\big).$$

Die Kettenregel besagt nun

$$h'(t) = Dg(f(t)) \cdot Df(t) = -\gamma(\alpha(t))\alpha'(t) + \gamma(\beta(t))\beta'(t).$$

b) Wir betrachten die Funktionen

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (2xy, \sin y, x^2 + y) \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u,v,w) & \mapsto & (u + w^2, vw, e^u) \end{cases}$$

und definieren $h = g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Die Jacobi-Matrizen von f und g sind

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 0 & \cos y \\ 2x & 1 \end{pmatrix} \qquad Dg(u,v,w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2w \\ 0 & w & v \\ e^u & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

so dass die Kettenregel folgendes Ergebnis liefert:

$$\begin{aligned} Dh(x,y) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x^2 + y \\ 0 & x^2 + y & \sin y \\ e^{2xy} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 0 & \cos y \\ 2x & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2y + 4x^3 + 4xy & 2x + 2x^2 + 2y \\ 2x \sin y & \cos y\,(x^2 + y) + \sin y \\ 2ye^{2xy} & 2xe^{2xy} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) Nun betrachten wir noch die Kettenregel im Spezialfall $n = p = 1,\ m = 2$ (wir schreiben t anstatt x). Zuerst betrachte

$$f(t) = \big(\alpha(t), \beta(t)\big), \quad h(t) = g(\alpha(t), \beta(t)).$$

Für die Jacobi-Matrizen von f und g erhalten wir

$$f'(t) = \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial g}{\partial(u,v)}(u,v) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v), \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \right)$$

und damit aus der Kettenregel

$$h'(t) = \frac{\partial g}{\partial u}\big(\alpha(t), \beta(t)\big)\alpha'(t) + \frac{\partial g}{\partial v}\big(\alpha(t), \beta(t)\big)\beta'(t).$$

d) Schließlich betrachten wir noch die Aufteilung der Koordinaten in zwei Gruppen. Sei dazu $x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \in \mathbb{R}^m$ und $g(y) \in \mathbb{R}^p$. Wir teilen die y-Variable in zwei Gruppen:

$$y = (\underbrace{y_1, \ldots, y_r}_{u}, \underbrace{y_{r+1}, \ldots, y_m}_{v}) = (u, v) \text{ mit } u \in \mathbb{R}^r,\ v \in \mathbb{R}^{m-r}.$$

Da f in den Definitionsbereich von g abbildet, trennen wir die Koordinatenfunktionen von f genauso:

$$f(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) \\ \beta(x) \end{pmatrix}, \quad \alpha(x) \in \mathbb{R}^r,\ \beta(x) \in \mathbb{R}^{m-r}.$$

Nun sei

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \text{ die Matrix der partiellen Ableitungen nach } y_1, \ldots, y_r$$

und

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \text{ die Matrix der partiellen Ableitungen nach } y_{r+1}, \ldots, y_m$$

Dann folgt

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x) = \frac{\partial g}{\partial u}\big(\alpha(x), \beta(x)\big)\frac{\partial \alpha}{\partial x}(x) + \frac{\partial g}{\partial v}\big(\alpha(x), \beta(x)\big)\frac{\partial \beta}{\partial x}(x).$$

Schematisch ergibt sich folgende Darstellung:

$$p\ \overset{n}{\boxed{\tfrac{\partial h(x)}{\partial x}}} = p\ \overset{m}{\underset{r \quad m-r}{\boxed{\tfrac{\partial g}{\partial u} \,\Big|\, \tfrac{\partial g}{\partial v}}}} \cdot \overset{n}{\boxed{\begin{array}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \\[1em] \frac{\partial \beta}{\partial x} \end{array}}} \begin{array}{l} r \\[1em] m-r \end{array}$$

Hierbei wurden die Zeilen und Spaltengrößen der einzelnen Matrizen an den Rändern der Matrizen vermerkt.

Satz 3.14 (Mittelwertsatz)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in D. Falls a, b und die Verbindungsstrecke $S_{ab} := \{(1-t)a + tb,\ t \in (0,1)\}$ in D liegen, dann existiert $\xi \in S_{ab}$ mit

$$f(b) - f(a) = \operatorname{grad} f(\xi) \cdot (b - a)$$

Definition 3.15 (Konvexität)

Eine Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvex, falls für alle Punkte $a, b \in C$ die Verbindungsstrecke S_{ab} zur Menge C gehört.

Korollar 3.16 *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex, offen und $f \in C^1(D, \mathbb{R})$.*

a) $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ *beschränkt* $\Rightarrow f \in \mathrm{Lip}(D)$

b) $\operatorname{grad} f \equiv 0 \Rightarrow f \equiv$ *const. in D.*

Bemerkung:

Teil b) ist verallgemeinerbar, falls $D \subset \mathbb{R}^n$ ein „Gebiet“ ist.

3.4 Exkurs: Gebiete in $\mathbb{R}^n$

Definition 3.17 (Polygonzug)

a) Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ sei $\overline{ab} = \{(1-t)a + tb, t \in [0,1]\}$ die abgeschlossene Verbindungsstrecke von a zu b.

b) Für $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}$ sei der Polygonzug $P(a_0, \ldots, a_k)$ erklärt durch

$$P(a_0, \ldots, a_k) = \overline{a_0 a_1} \cup \overline{a_1 a_2} \cup \ldots \cup \overline{a_{k-1} a_k}$$

Definition 3.18 (Zusammenhangskomponenten) *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen.*

a) Für $x, y \in D$ bedeutet $x \sim y : \exists$ Polygonzug $P(x, a_1, \ldots, a_{k-1}, y) \subset D$. Damit ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

b) Die Äquivalenzklassen heißen Zusammenhangskomponenten von D.

c) Falls es nur eine Äquivalenzklasse gibt, dann heißt D zusammenhängend oder Gebiet.

Satz 3.19 *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f \in C^1(D, \mathbb{R})$. Falls* $\operatorname{grad} f \equiv 0$ *in D, dann ist $f \equiv$const. auf D.*

Ende des Exkurses

3.5 Richtungsableitung

Definition 3.20 (Richtungsableitung)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von ξ und $f : U \to \mathbb{R}$. Sei $e = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \mathbb{R}^n$ ein Einheitsvektor, d.h. $\epsilon_1^2 + \ldots + \epsilon_n^2 = 1$. Die Funktion f heißt im Punkt ξ in Richtung e differenzierbar, falls

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\xi + te) - f(\xi)}{t} \quad \textit{existiert.}$$

Der Limes heißt Richtungsableitung von f in Richtung e im Punkt ξ und wird bezeichnet mit dem Symbol $\frac{\partial f}{\partial e}(\xi)$.

Bemerkung: Es gelten folgende Beziehungen

a) $f_{x_i}(\xi) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(\xi), \quad i = 1, \ldots, n.$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial(-e)}(\xi) = -\dfrac{\partial f}{\partial e}(\xi),$

Satz 3.21

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, eine Umgebung von ξ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ sei differenzierbar im Punkt ξ.

a) Für jeden Einheitsvektor $e = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \mathbb{R}^n$ existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial e}(\xi)$ und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial e}(\xi) = \operatorname{grad} f(\xi) \cdot e = \sum_{n=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)\epsilon_i$$

b)

$$\bigcup_{e \in \mathbb{R}^n, \|e\|=1} \left\{ \frac{\partial f}{\partial e}(\xi) \right\} = [-\|\operatorname{grad} f(\xi)\|, \|\operatorname{grad} f(\xi)\|]$$

c) Falls $\operatorname{grad} f(\xi) \neq 0$, dann gilt für $e^* = \dfrac{\operatorname{grad} f(\xi)}{\|\operatorname{grad} f(\xi)\|}$

$$\frac{\partial f}{\partial e^\star}(\xi) = \|\operatorname{grad} f(\xi)\|, \quad e^\star = \textit{ Richtung des stärksten Anstiegs von } f \textit{ im Punkt } \xi$$

$$\frac{\partial f}{\partial(-e^\star)}(\xi) = -\|\operatorname{grad} f(\xi)\|, \quad -e^\star = \textit{ Richtung des stärksten Abfalls von } f \textit{ im Punkt } \xi$$

4 Satz von Taylor, Lokale Extrema

Satz 4.1 (Satz von Taylor)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{m+1}(D, \mathbb{R})$, $m \geq 0$ und die Punkte ξ, $\xi + h$ sowie ihre Verbindungsstrecke $S_{\xi,\xi+h}$ seien in D gelegen. Dann gilt:

$$f(\xi+h) = f(\xi)+\nabla f(\xi)\cdot h+\sum_{i,j=1}^{n} \frac{h_i h_j}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi)+\ldots+\sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} \frac{h_{i_1} \ldots h_{i_m}}{m!} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}(\xi)+R_m$$

mit

$$R_m = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_{m+1}=1}^{n} \frac{h_{i_1} \ldots h_{i_{m+1}}}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{m+1}}}(\xi + \tau h)$$

für ein $\tau = \tau(\xi, h) \in (0, 1)$

Definition 4.2 (Hesse-Matrix)

Die Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ besitze im Punkt $x \in \overset{o}{D}$ partielle Ableitungen zweiter Ordnung. Dann heißt die $n \times n$-Matrix

$$H_f(x) := \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(x) & \cdots & f_{x_1 x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(x) & \cdots & f_{x_n x_n}(x) \end{pmatrix} \textit{ Hesse-Matrix.}$$

Falls $f \in C^2(D)$, dann folgt mit dem Satz von Schwarz $H_f^T(x) = H_f(x)$, d.h. $H_f(x)$ ist symmetrisch.

Beachte:

$$\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) = h^T \cdot H_f(\xi) \cdot h, \qquad \text{wobei } h \text{ ein Spaltenvektor ist.}$$

Folgerung (Taylor-Formel zweiter Ordnung):

$$f(\xi + h) = f(\xi) + \nabla f(\xi) \cdot h + \frac{1}{2} h^T \cdot H_f(\xi + \tau h) \cdot h \text{ für ein } \tau = \tau(\xi, h) \in (0, 1)$$

Definition 4.3 (Lokale Extrema reellwertiger Funktionen)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Man sagt: f besitzt im Punkt $\xi \in D$ ein

lokales Maximum, falls eine Kugel $B_\delta(\xi)$ existiert mit $f(\xi) \geq f(x) \quad \forall x \in B_\delta(\xi) \cap D$

lokales Minimum, falls eine Kugel $B_\delta(\xi)$ exisitert mit $f(\xi) \leq f(x) \quad \forall x \in B_\delta(\xi) \cap D$

Ein lokales Maximum/Minumum wird auch lokaes Extremum genannt. Falls „=“ nur für $x = \xi$ gilt, so heißt ξ „strenges Extremum“ (strenges lokales Maximum/Minimum).

Falls

$f(\xi) \geq f(x)\ \forall x \in D$, so besitzt f im Punkt ξ ein globales Maximum.

$f(\xi) \leq f(x)\ \forall x \in D$, so besitzt f im Punkt ξ ein globales Minimum.

Satz 4.4 (Kriterium von Fermat)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ besitze in $\xi \in \overset{o}{D}$ ein lokales Extremum. Falls $\operatorname{grad} f(\xi)$ *existiert dann gilt* $\operatorname{grad} f(\xi) = 0$.

Bemerkung:

Sei $f(x, y) = xy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist zwar $\operatorname{grad} f(0, 0) = (0, 0)$, aber f hat in $(0, 0)$ kein lokales Extremum.

Definition 4.5 (Quadratische Formen)

Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix. Dann heißt die Funktion $Q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$Q_A(x) := x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} x_j$$

eine quadratische Form. Die Matrix A (bzw. die quadratische Form Q_A) heißt

positiv definit,	*falls $Q_A(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,*
positiv semi-definit,	*falls $Q_A(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$,*
negativ definit,	*falls $Q_A(x) < 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,*
negativ semi-definit,	*falls $Q_A(x) \leq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$,*
indefinit,	*falls $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ existieren mit $Q_A(x_0) > 0 > Q_A(y_0)$.*

Definition 4.6 (Matrix-Norm)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *Definiere* $\|A\| := \Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$.

Bemerkung:

Auf dem Vektorraum der reellen $m \times n$-Matrizen ist $\|\cdot\|$ eine Norm.

Lemma 4.7 *Sei* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *und* $x \in \mathbb{R}^n$. *Dann gilt:*

a) $\|Ax\| \le \|A\|\,\|x\|$.

b) Im Fall $m = n$ *gilt* $Q_A(x) \le \|A\|\,\|x\|^2$.

Lemma 4.8 *Sei* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Q_A *ist positiv definit genau dann, falls ein* $\alpha > 0$ *existiert, so dass* $Q_A(x) \ge \alpha$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$ *mit* $\|x\| = 1$.

b) Q_A *sei positiv/negativ/indefinit. Dann existiert* $\epsilon > 0$, *sodass für alles* $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit* $\|B - A\| < \epsilon$ *gilt:* Q_B *ist positiv/negativ/indefinit.*

c) Q_A *sei indefinit. Dann existieren* $a, b \in \mathbb{R}^n$ *mit* $\|a\| = \|b\| = 1$ *und* $\epsilon > 0$ *mit der Eigenschaft:*

$$Q_B(\lambda a) > 0 > Q_B(\lambda b)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *und alle* $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit* $\|B - A\| < \epsilon$.

Satz 4.9 (Hinreichende Bedingung für Lokale Extrema)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $f \in C^2(D;\mathbb{R})$. *Für einen Punkt* $\xi \in D$ *gelte* $\operatorname{grad} f(\xi) = 0$. *Dann gilt:*

a) $H_f(\xi)$ *positiv definit* $\Rightarrow$ f *hat an der Stelle* ξ *ein lokales Minimum.*

b) $H_f(\xi)$ *negativ definit* $\Rightarrow$ f *hat an der Stelle* ξ *ein lokales Maximum.*

c) $H_f(\xi)$ *indefinit* $\Rightarrow$ f *hat an der Stelle* ξ *kein lokales Extremum.*

Beispiel $(n = 2)$

Sei $A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$Q_A(x,y) = (x,y) \cdot \begin{pmatrix} ax+by \\ bx+cy \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad D = \det A = ac - b^2$

Dann gilt die folgende Klassifizierung:

Falls $D > 0$ ist, so gilt: $\begin{cases} a > 0 & \Rightarrow Q_A \text{ positiv definit} \\ a < 0 & \Rightarrow Q_A \text{ negativ definit} \end{cases}$

Falls $D = 0$ ist, so gilt: $\begin{cases} a > 0 \text{ oder } a = 0,\ c \geq 0 & \Rightarrow Q_A \text{ positiv semidefinit} \\ a < 0 \text{ oder } a = 0,\ c \leq 0 & \Rightarrow Q_A \text{ negativ semidefinit} \end{cases}$

Falls $D < 0$ ist, so gilt: Q_A indefinit

Grund: Es gilt

$$aQ_A(x,y) = (ax+by)^2 + Dy^2,$$

so daß sich für $a \neq 0$ das Vorzeichen von Q_A ablesen lässt.

Beispiel:

Es sei $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt:

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x) = (0,0) \Leftrightarrow x^2 = y,\ y^2 = x$$

Dies ist nur möglich für

$$x = 0, y = 0 \text{ oder } x = 1, y = 1.$$

Die Hesse-Matrix hat die Form:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

Demzufolge gilt im Punkt $(0,0)$:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},\ D < 0,$$

d.h. die Hesse-Matrix ist indefinit und es liege kein Extremum vor.

Im Punkt $(1,1)$ gilt:

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix},\ D = 36 - 9 = 27 > 0,$$

d.h. die Hesse-Matrix ist positiv definit und $(1,1)$ ist Stelle eines lokalen Minimums.

5 Implizit definierte Funktionen / Umkehrsatz

Erinnerung: Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix, $A = (a_{ij})$ und $\|A\|_2 := \big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\big)^{\frac{1}{2}}$ die Norm der Matrix A. Dann gilt: $\|Ax\| \leq \|A\|_2 \cdot \|x\| \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Ist $A = (a_{ij})$ und $A^k = (a_{ij}^k) \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ dann gilt:

$$\|A - A^k\|_2 \overset{k\to\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow a_{ij}^k \overset{k\to\infty}{\to} a_{ij} \ \forall i = 1,\dots,m, \ \forall j = 1,\dots,n$$

Bemerkung: wir verwenden das Symbol $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ für die euklidische Norm von x. Manchmal schreibt man auch $\|\cdot\|_2$ für die euklidische Norm. Bei der Norm für Vektoren bleiben wir bei der Konvention, daß mit $\|\cdot\|$ die euklidische Norm gemeint ist. Bei Matrixnormen schreiben wir $\|\cdot\|_2$ für die oben definierte Norm.

5.1 Lipschitzbedingung und Nullstellensatz

Satz 5.1 (Lipschitzbedingung)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine C^1-Funktion mit $\|Df(x)\|_2 \leq L \ \forall x \in D$. Dann folgt

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \ \forall x, y \in D \text{ für die } S_{xy} \subset D \text{ ist.}$$

Dabei ist S_{xy} die Verbindungstrecke von x und y.

Bemerkung (Eigenschaften der Matrixnorm $\|\cdot\|$): Es seien A, B, C $n \times n$ Matrizen. Dann gelten folgende Aussagen:

1) $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2\|B\|_2$
2) Ist $\|C\|_2 < 1$ so ist $(\mathrm{Id} - C)$ invertierbar und es gilt

$$(\mathrm{Id} - C)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} C^k. \quad \text{(Die Reihe heißt Neumannsche Reihe)}$$

3) Falls A invertierbar ist und $\|A - B\|_2 < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|_2}$, dann ist auch B invertierbar. Gilt sogar $\|A - B\|_2 \leq \dfrac{1}{2\|A^{-1}\|_2}$, so folgt die Abschätzung

$$\|A^{-1} - B^{-1}\|_2 \leq 2\|A^{-1}\|_2^2 \|A - B\|_2.$$

Damit ist die Abbildung $B \mapsto B^{-1}$ innerhalb der Kugel $B_r(A)$, $r = \dfrac{1}{2\|A^{-1}\|_2}$ Lipschitz stetig.

Nullstellenproblem

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$. Wir stellen uns das Problem, eine Nullstelle von f zu suchen, also ein (oder mehrere) $x \in D$ mit $f(x) = 0$.

Idee: Umformulierung als Fixpunktproblem und Anwendung des Banach'schen Fixpunktsatzes

2 Varianten:

$x = x - \left[Df(x)\right]^{-1} f(x)$, falls $Df(x)$ invertierbar. Dann setze: $x_{k+1} = x_k - \left[Df(x)\right]^{-1} f(x_k)$ (Newtonverfahren)	**oder**	$x = x - A^{-1} f(x)$, für geeignete invertierbare Matrix A Dann setze: $x_{k+1} = x_k - A^{-1} f(x_k)$ (vereinfachtes Newtonverfahren)

Falls die Abbildung $x \mapsto x - \left[Df(x)\right]^{-1} f(x)$ bzw. $x \mapsto x - A^{-1} f(x)$ die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes erfüllt, dann konvergiert die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen eine Nullstelle von f. Diese Thematik wird in den Numerik-Vorlesungen vertieft. Hier begnügen wir uns mit einer sehr einfachen (aber für unsere Zwecke ausreichenden) Variante.

Satz 5.2 (Nullstellensatz)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei invertierbar und $\exists$ Kugel $B_r(a) \subset D$, sodass $F(x) := x - A^{-1} f(x)$ auf $B_r(a)$ einer Lipschitzbedingung mit Lipschitzkonstante $L = \frac{1}{2}$ genügt. Falls $\|A^{-1} f(a)\| < \frac{1}{2} r$, dann besitzt f in $B_r(a)$ genau eine Nullstelle.

5.2 Implizit definierte Funktionen

Beispielproblem:

Gegeben sei die Gleichung $f(x,y) = 0$ mit einer Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Wir stellen uns die folgende Frage: kann man die Nullstellenmenge

$$N = \{(x,y) \in D : f(x,y) = 0\}$$

als „Funktionsgraphen" $x = g(y)$ oder $y = h(x)$ darstellen? Anders gesagt: kann man $f(x,y) = 0$ nach x oder y auflösen?

Im Allgemeinen wird das für die Nullstellenmenge N von f als Ganzes nicht möglich sein. Aber in der Nähe von gewissen Elementen $(x_0, y_0) \in N$ könnte das möglich sein, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel (Auflösen von Hand): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Ellipsengleichung)

$E := \{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ und $(x_0, y_0) \in E$ sei fest.

$$\begin{array}{lll} \text{falls} & y_0 > 0: & y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \\ \text{falls} & y_0 < 0: & y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \\ \text{falls} & y_0 = 0, x_0 = \pm a: & \text{keine eindeutige Auflösbarkeit nach } y \text{ möglich} \end{array}$$

Aber, in der Nähe der Punkte $y_0 = 0$, $x_0 = \pm a$ ist die Auflösbarkeit nach x möglich:

$$\begin{array}{ll} x = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} & (x_0 > 0) \\ x = -a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} & (x_0 < 0) \end{array}$$

Wir schließen noch eine kleine Beobachtung an:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{2y_0}{b^2} \begin{cases} \neq 0 \Rightarrow & \text{lokale Auflösbarkeit nach } y \\ = 0 \Rightarrow & \text{keine lokale Auflösbarkeit nach } y \end{cases}$$

D.h. die Auflösbarkeit von $f(x,y) = 0$ nach y in der Nähe des Punktes (x_0, y_0) könnte etwas mit dem Verschwinden/Nichtverschwinden von $\frac{\partial f}{\partial y}$ an der Stelle (x_0, y_0) zu tun haben. Dies stellt sich als im Allgemeinen richtig heraus.

Beschreibung der allgemeinen Situation:

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$. Die Elemente des $\mathbb{R}^{n+m}$ beschreiben wir wie folgt:

$$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$$

d.h.

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \text{ und } y = (y_1, \ldots, y_m).$$

Wir haben also die Elemente des $\mathbb{R}^{n+m}$ in zwei Gruppen aufgeteilt: der erste Teil heißt $x \in \mathbb{R}^n$, der zweite $y \in \mathbb{R}^m$. Suchen wir nun Nullstellen des Funktion f, so lautet das Gleichungssystem

$$f(x, y) = 0$$

ausführlich geschrieben:

$$m \text{ Gleichungen } \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \end{cases}$$

Wir benutzen im Folgenden die Notation:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ dies ist eine } m \times n \text{ Matrix,}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} \text{ dies ist eine } m \times m \text{ Matrix}$$

Satz 5.3 (Satz über implizit definierte Funktionen)

Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$ sei eine C^1-Funktion. Für ein $(\xi, \eta) \in D$ gelte $f(\xi, \eta) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta)$ sei invertierbar. Dann gilt:

$\exists$ offene Umgebungen $U(\xi) \subset \mathbb{R}^n$, $V(\eta) \subset \mathbb{R}^m$ mit $U(\xi) \times V(\eta) \subset D$ und eine C^1-Funktion $g : U(\xi) \to V(\eta)$ mit den Eigenschaften:

a) $f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in U(\xi)$ (Existenz)

b) Falls $f(x, y) = 0$ für ein $(x, y) \in U(\xi) \times V(\eta) \Rightarrow y = g(x)$ (Eindeutigkeit)

Zusatz: Ist $f \in C^k(D)$, so ist $g \in C^k(U(\xi))$.

Anwendungen:

1) Differentialgeometrie:

   $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt Flächenstück, falls eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine bijektive C^1-Funktion $f : U \to S$ existieren mit der Eigenschaft:

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)}_{\text{Tangentialvektoren}} \text{ sind linear unabhängig } \forall (x,y) \in U$$

   Sei $S' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\}$, $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und $P \in S'$.

   Frage: ist S' lokal um den Punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ ein Flächenstück?

   Antwort: Ja, falls $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

2) Lineare Algebra:

   $A \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ sei eine reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix mit dem einfachen Eigenwert λ_0 (d.h. $\dim N(A - \lambda_0 \operatorname{Id}) = 1$) und einem zugehörigen Eigenvektor $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $\|y_0\| = 1$.

   Frage: Für $\epsilon \in \mathbb{R}$ klein, besitzt $A + \epsilon B$ auch einen einfachen Eigenwert $\lambda(\epsilon)$?

   Antwort: Ja, es gibt C^∞-Abbildungen $\epsilon \mapsto \lambda(\epsilon)$, $\epsilon \mapsto y(\epsilon)$ mit $\lambda(0) = \lambda_0$, $y(0) = y_0$, $\lambda'(0) = x_0^T B x_0$ so, dass $\lambda(\epsilon)$ einfacher Eigenwert von $A + \epsilon B$ ist mit zugehörigem normierten Eigenvektor $y(\epsilon)$.

5.3 Umkehrsatz

Erinnerung aus Analysis I:

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\xi \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(\xi) \neq 0$. Folglich ist f streng monoton in einem Intervall $U = (\xi - \epsilon, ¸\xi + \epsilon)$ mit geeignet kleinem $\epsilon > 0$. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : V = f(U) \to U$ existiert und ist differenzierbar mit

$$\big(f^{-1}\big)'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)} \text{ für alle } y \in V.$$

Jetzt betrachten wir den mehrdimensionalen Fall $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \xi \in D,\ \eta = f(\xi)$.

Es stellt sich die Frage: existieren Umgebungen $U(\xi),\ V(\eta)$, sodass $f : U(\xi) \to V(\eta)$ invertierbar ist?

Satz 5.4 (Satz über die Umkehrabbildung)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ sowie $\xi \in D$, $\eta = f(\xi)$ und $\frac{\partial f}{\partial x}(\xi)$ sei invertierbar.

Dann exisitert eine offene Umgebung $U = U(\xi) \subset D$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $V = f(U)$ ist offene Umgebung von η

b) $f : U \to V$ ist bijektiv

c) $g := f^{-1} : V \to U$ ist differenzierbar auf V mit

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x)\Big)^{-1}, \ y = f(x)$$

Beispiele für Satz 5.3/5.4

1) $f(x, y) = e^{2x-3y} + 3x - 5y = 0, \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(3, 2) = 0, \quad f_y(3, 2) = -8 \neq 0$

$\exists$ Umgebung $U(3) \subset \mathbb{R}$, $V(2) \subset \mathbb{R}$ und eine Funktion $g : U(3) \to V(2)$ mit

$$f(x, g(x)) = 0 \ \forall x \in U(3)$$

Bestimmung von $g'(3)$:

$$\begin{array}{ccccl} \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) & + & \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x) & = 0 & \\ 5 & + & (-8)g'(3) & = 0, & \text{also: } g'(3) = \frac{5}{8} \end{array}$$

2)

$$f(x, y_1, y_2) = \left(\begin{array}{c} x^2 + y_1^2 - 2y_2^2 \\ x^2 + 2y_1^2 + y_2^3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 4 \end{array} \right)$$

Spezielle Lösung: $\xi = 1, \eta = (1, 1)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ ist invertierbar}$$

Also $\exists g : U(1) \to V(1, 1) \subset \mathbb{R}^2$ mit $f(x, g(x)) = 0$.

Bestimmung von $\frac{\partial g}{\partial x}(\xi)$: wir differenzieren die Gleichung

$$f(x, g(x)) = 0$$

nach x und erhalten

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta) &+ \tfrac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)\cdot\tfrac{\partial g}{\partial x}(\xi) = 0\\ \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} &+ \begin{pmatrix}2 & -4\\4 & 3\end{pmatrix}\tfrac{\partial g}{\partial x}(\xi) = 0\end{aligned}$$

Daraus läßt sich

$$\frac{\partial g}{\partial x}(\xi)$$

berechnen.

3) $f(x,y) = (e^x\cos y, e^x\sin y)$

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x,y) = \begin{pmatrix}e^x\cos y & -e^x\sin y\\ e^x\sin y & e^x\cos y\end{pmatrix},\ \det(\ldots) = e^x \neq 0$$

Also ist f in jedem Punkt $(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2$ lokal invertierbar. Aber $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ist nicht injektiv, denn $f(x,y) = f(x,y+2\pi)$.

6 Extrema unter Nebenbedingungen

Beispiele:

a) Welcher Punkt der Kreislinie $x^2+y^2 = 1$ hat vom Punkt $(1, 1)$ den größten bzw. kleinsten Abstand?

   Minimiere/Maximiere die Funktion $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$

   für $(x, y) \in N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$, wobei $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

b) Welches in den Einheitskreis einbeschriebene n-Eck, $n \geq 3$, hat maximalen Flächeninhalt?

   Flächeninhalt eines Dreiecks: $\frac{1}{2}\sin(\alpha_i)$, $\quad \alpha_i$=Innenwinkel, $0 < \alpha_i < \pi$.

   Maximiere $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} \sin(\alpha_i)$

   für $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, 0 < x_i < \pi, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 2\pi\}$

6.1 Allgemeines Problem im Fall $n = 2$

Seien $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^1-Funktionen. Wir stellen uns das Problem, die Funktion f zu maximieren/zu minimieren unter der Nebenbedingung

$$(x, y) \in N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}.$$

f hat ein Maximum (unter der Nebenbedingung N) an der Stelle $(\xi, \eta) \in N$, falls gilt:

$$f(\xi, \eta) \geq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in N$$

f hat ein Minimum (unter der Nebenbedingung N) an der Stelle $(\xi, \eta) \in N$, falls gilt:

$$f(\xi, \eta) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in N$$

Behauptung: Ist (ξ, η) Stelle eines lokalen Maximums/Minimums mit $\nabla g(\xi, \eta) \neq 0$, dann sind $\nabla f(\xi, \eta)$ und $\nabla g(\xi, \eta)$ linear abhängig.

Der Beweis dieser Behauptung wird mit dem Satz über implizit definierte Funktionen geführt. Wir können aus dieser Erkenntnis eine Folgerung ziehen:

Folgerung: Es sei (ξ, η) eine Extremalstelle (Maximum oder Minimum) von f unter der Nebenbedingung N mit $\nabla g(\xi, \eta) \neq 0$. Dann gilt:

Es existiert ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion $H(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ als Funktion der 3 Variablen (x, y, λ) eine Nullstelle der Ableitung an der Stelle (ξ, η, λ_0) besitzt.

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\frac{\partial H}{\partial(x,y)}(\xi, \eta, \lambda_0) = \nabla f(\xi, \eta) + \lambda_0 \nabla g(\xi, \eta) = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\xi, \eta, \lambda_0) = g(\xi, \eta) = 0.$$

6.2 Der Fall $n \geq 2$

Der folgende Satz liefert eine notwendige Bedingung für Extrema unter Nebenbedingungen. Diese notwendige Bedingung ist vergleichbar zur notwendigen Bedingung in Satz 4.4 (Kriterium von Fermat). In Satz 4.4 wird ebenso wie im nun folgenden Satz 6.1 die Existenz eines Extremums vorausgesetzt.

Satz 6.1 (Lagrange'sche Multiplikatorenregel)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}^m$ seien C^1-Funktionen mit $m < n$. f habe an der Stelle $\xi \in U$ ein Extremum (Maximum oder Minimum) unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$. Falls Rang$\big(\frac{\partial g}{\partial x}(\xi)\big) = m$ ist, dann existieren reelle Zahlen $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0) \in \mathbb{R}^m$, sodass die Funktion

$$H(x, \lambda) := f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

an der Stelle (ξ, λ_0) eine Nullstelle der Ableitung hat, d.h. $DH(\xi, \lambda^0) = 0$.

Bemerkung: Die Zahlen $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$ heißen Lagrange-Multiplikatoren.

Beispiele:

a) Wir greifen zuerst das Beispiel vom Anfang des Kapitels auf, d.h.

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$$

und wir suchen die Extrema von f auf der Einheitskreislinie $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Da die Einheitskreislinie kompakt ist und f stetig ist, besitzt f auf der Einheitskreislinie sowohl ein Maximum als auch ein Minimum. Wir bestimmen nun mit Hilfe von Satz 6.1 diese Extemstellen. Zuerst stellen wir fest:

$$\frac{\partial g}{\partial(x,y)}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \text{ hat Rang 1.}$$

Weiterhin ist hier

$$H(x,y,\lambda) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial(x,y)}(x,y,\lambda) &= \begin{pmatrix} 2(x-1) + 2\lambda x \\ 2(y-1) + 2\lambda y \end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) &= x^2 + y^2 - 1 &&= 0 \end{aligned}$$

Die Nullstellen der Ableitung von H ergeben sich also zu

$$x = \frac{1}{1+\lambda}, \; y = \frac{1}{1+\lambda}, \quad \frac{2}{(1+\lambda)^2} = 1, \;\; \text{d.h. } \lambda = \pm\sqrt{2} - 1$$

Die möglichen Extremstellen sind als die folgenden:

$$(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad (x,y) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right).$$

Da f sein Minimum/Maximum auf N annimmt, folgt:

$$\begin{aligned} (x,y) &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) && \text{Punkt minimalen Abstands} \\ (x,y) &= \left(\tfrac{-1}{\sqrt{2}}, \tfrac{-1}{\sqrt{2}}\right) && \text{Punkt maximalen Abstands} \end{aligned}$$

b) Nun wenden wir uns dem zweiten Beispiel vom Anfang des Kapitels zu. Dort ist

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \sin(x_i)$$

und

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i - 2\pi$$

sowie

$$U = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < x < \pi, i = 1, \ldots, n\}.$$

Damit ist auch die Funktion H bestimmt durch

$$H(x, \lambda) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \sin(x_i) + \lambda\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\pi\Big).$$

Noch ist nicht klar, daß f auf der Menge $N = \{x \in U, g(x) = 0\}$ ein Extremum besitzt. Nehmen wir einmal an, dies wäre der Fall. Dann liefert die Lagrange'sche Multiplikatorenregel:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial H}{\partial x_i}(\xi, \lambda_0) &= \tfrac{1}{2}\cos(\xi_i) + \lambda_0 &&= 0 \\ \tfrac{\partial H}{\partial \lambda}(\xi, \lambda_0) &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i - 2\pi &&= 0 \end{aligned}$$

Demzufolge ist

$$\xi_1 = \ldots = \xi_n = \frac{2\pi}{n}$$

d.h. das regelmäßige n-Eck ist der einzige Extrempunkt von f in $N = \{x \in U, g(x) = 0\}$. Wir zeigen, daß es sich um ein Maximum handelt. Zuerst stellen wir fest, daß die Existenz eines Maximums (ebenso wie die eines Minimums) von f auf der kompakten Menge:

$$\widetilde{N} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \le x_i \le \pi, \sum_{i=1}^{n} x_i = 2\pi\}$$

gesichtert ist, d.h.,

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \sin(x_i)$$

nimmt sein Maximum auf $\widetilde{N}$ im Punkt $\xi \in \widetilde{N}$ an. Wir zeigen, daß $\xi \in N$ gilt:

1. Fall: Angenommen, $\xi_i = 0$ für ein i, d.h. es liegt höchstens ein $n-1$–Eck vor. Durch Hinzunehmen einer weiteren Ecke wird der Flächeninhalt echt größer. Widerspruch!

2. Fall: Angenommen, $\xi_i = \pi$ für ein i. Dann ist einer der Nachbarwinkel ξ_j kleiner als $\frac{\pi}{2}$. Ersetze ξ_i durch $\frac{\pi}{2}$ und ξ_j durch $\xi_j + \frac{\pi}{2}$. Damit bleibt die Winkelsumme $= 2\pi$ erhalten, aber der Gesamt-Flächeninhalt wird echt größer, denn:

$$\sin(\xi_j) < \sin(\xi_j + \frac{\pi}{2}) + 1 = \cos(\xi_j) + 1 \quad (\xi_j < \frac{\pi}{2})$$

Widerspruch! Folglich ist ξ tatsächlich Stelle eines Maximums von f über N.

Wie steht es mit dem Miniumum von f über N? Dies wird nicht angenommen, denn wenn $x_1, \ldots, x_{n-2}$ gegen 0 streben und x_{n-1}, x_n gegen π (so daß die Summe der Winkel $= 2\pi$ bleibt), dann strebt $f(x)$ gegen 0. Für alle $x \in N$ ist $f(x) > 0$, d.h. $\inf_N f = 0$ aber das Infimum wird nicht angenommen (natürlich ist $\xi = (0, 0, \ldots, 0, \pi, \pi) \in \tilde{N}$, d.h. $\xi = (0, 0, \ldots, 0, \pi, \pi)$ ist Stelle des Minimums von f auf der kompakten Menge $\tilde{N}$; es entspricht einen 2-Eck =degeneriertes n-Eck).

7 Wege und Kurven

7.1 Definitionen, Weglänge, Parametrisierungen

Beispiel: Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & (r\cos t, r\sin t, at) \end{cases}$$

Φ heißt Weg, die Bildmenge $\Phi([0, 2\pi])$ heißt Kurve (hier handelt es sich um eine sogenannte Schraubenlinie)

Definition 7.1 *Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.*

a) *Ein Weg im $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Funktion $\Phi : I \to \mathbb{R}^n$. Die Bildmenge $\mathcal{C} = \Phi(I)$ heißt die von Φ erzeugte Kurve und Φ heißt Parametrisierung dieser Kurve.*

b) *Der Weg Φ heißt geschlossen, falls $\Phi(a) = \Phi(b)$ ist.*

c) *Φ heißt Jordanweg, falls Φ injektiv ist. Φ heißt geschlossener Jordanweg, falls $\Phi(a) = \Phi(b)$ und $\Phi|_{[a,b)}$ injektiv ist.*

d) *Φ heißt glatt, wenn $\Phi \in C^1(I)$ und $\Phi'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$ ist.*

e) *Φ heißt stückweise C^1, falls es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ gibt, so dass $\Phi|_{[t_i, t_{i+1}]}$ C^1 ist für $i = 0, 1, \ldots, n-1$.*

f) *Eine Kurve $\mathcal{C}$ heißt (stückweise) C^1-Kurve, falls es eine Parametrisierung $\Phi : [a, b] \to \mathcal{C}$ von $\mathcal{C}$ gibt, die (stückweise) C^1 ist.*

g) *Eine Kurve $\mathcal{C}$ heißt glatt bzw. Jordankurve/geschlossene Jordankurve, falls es eine Parametrisierung $\Phi : [a, b] \to \mathcal{C}$ von $\mathcal{C}$ gibt, die glatt bzw. ein Jordanweg/geschlossener Jordanweg ist.*

Beispiele:

a) Die Strecke $\overline{ab}$ ist eine Jordankurve für $a \neq b$ mit der Parametrisierung:

$$\Phi(t) = a + t(b - a), \quad t \in [0, 1]$$

oder

$$\tilde{\Phi}(t) = a + t^2(b - a), \quad t \in [0, 1]$$

Achtung: Φ ist glatt, $\tilde{\Phi}$ ist nicht glatt.

b) Der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ ist eine geschlossene Jordankurve

$$\Phi(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Man benutzt auch die Schreibweise

$$x = \cos(t),\ y = \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Analog ist die Ellipse eine geschlossene Jordankurve mit Parametrisierung

$$\tilde{\Phi}(t) = (a\cos t, b\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

bzw.

$$x = a\cos(t),\ y = b\sin(t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

c) Zykloide (Kurve eines Punktes P auf einem in x-Richtung rollenden Rad)

Mittelpunkt M	(rt, r) läuft mit konstanter Geschwindigkeit
P	$\big(rt + a\sin t, r + a\cos t\big)$
Weg	$\Phi(t) = \big(rt + a\sin t, r + a\cos t\big), \quad t \in [0, \infty)$
Kurve (Zykloide)	$\mathcal{C} = \Phi([0, \infty))$

Offenbar ist $\Phi \in C^1([0, \infty))$. Ist Φ glatt?

$$\Phi'(t) = \big(r + a\cos t, -a\sin t\big)$$

Also ist Φ glatt, falls $0 < a < r$ ist. Aber für $a = r$ ist $\Phi'(\pi) = 0$. Die Kurve ist also nicht glatt im Fall $a = r$.

In der nachfolgenden Definition benutzen wir die Begriffe **Zerlegung** eines Intervalls und **Feinheitsmaß** einer Zerlegung, vgl. Analysis 1, Definition 10.1.

Definition 7.2

Sei $I = [a, b]$ und $\Phi : I \to \mathbb{R}^n$ ein Weg. Sei Z eine Zerlegung von I mit $a = t_0 < \ldots < t_p = b$ und $P\big(\Phi(t_0, \ldots, t_p)\big)$ der zu Φ und Z gehörige Polygonzug.

a) Die Länge des Polygonszuges $P\big(\Phi(t_0, \ldots, t_p)\big)$ ist definiert durch

$$l(Z, \Phi) = l(Z) := \sum_{i=1}^{p} \|\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})\|$$

b) Die Weglänge von Φ ist definiert durch

$$L(\Phi) := \sup_{Z} l(Z),$$

wobei Z eine beliebige Zerlegung von $[a, b]$ ist.

c) Der Weg Φ heißt rektifizierbar, falls $L(\Phi) < \infty$ ist.

Bemerkung: $L(\Phi) \in [0, \infty]$.

Es existiert stets eine Folge von Zerlegungen Z^k, $\underbrace{|Z^k| \to 0}_{\text{Feinheitsmaß}}$ mit $L(\Phi) = \lim_{k\to\infty} l(Z^k)$

Proposition 7.3 (Eigenschaften der Weglänge)

Sei $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *ein Weg. Dann gelten folgende Aussagen:*

a) $L(\Phi) \geq \|\Phi(b) - \Phi(a)\|$

b) Ist Φ *Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante* M *(z.B.* $\|\Phi'(t)\| \leq M$*), dann folgt*

$$L(\Phi) \leq M(b - a) < \infty.$$

c) $\Phi, \Psi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *seien rektifizierbare Wege. Dann gilt* $|L(\Phi) - L(\Psi)| \leq L(\Phi - \Psi)$*, wobei* $\Phi - \Psi$ *der punktweise definierte Weg* $t \mapsto \Phi(t) - \Psi(t)$ *ist.*

d) $\Phi_1 : [a, c] \to \mathbb{R}^n, \Phi_2 : [c, b] \to \mathbb{R}^n$ *seien rektifizierbare Wege mit* $\Phi_1(c) = \Phi_2(c)$*. Dann ist*

$$\Phi = \Phi_1 \oplus \Phi_2 : \begin{cases} [a, b] & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & \begin{cases} \Phi_1(t), & a \leq t \leq c \\ \Phi_2(t), & c \leq t \leq b \end{cases} \end{cases}$$

rektifizierbar mit $L(\Phi_1 \oplus \Phi_2) = L(\Phi_1) + L(\Phi_2)$*.*

Definition 7.4

$\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *sei rektifizierbar. Dann ist* $\Phi : [a, t] \to \mathbb{R}^n,\ a < t \leq b$ *auch rektifizierbar und* $s(t) := L(\Phi|_{[a,t]})$ *heißt Weglängenfunktion. Setze* $s(a) = 0$*.*

Satz 7.5 *Sei* $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *ein rektifizierbarer Weg.*

a) $S : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ist stetig, monoton wachsend. Ist* Φ *ein Jordanweg, dann ist* s *streng monoton wachsend.*

b) Ist Φ *stückweise* C^1*, dann ist* s *stückweise stetig differenzierbar und es gilt*

$$s(t) = \int_a^t \|\Phi'(\tau)\| d\tau$$

Beispiele:

a) Zykloide mit $r = a$, $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \|\Phi'(t)\| dt &= \int_0^{2\pi} \Big|\Big|\big(r + a\cos t, -a\sin t\big)\Big|\Big| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + a^2 + 2ra\cos t} dt \\
&\overset{r=a}{=} a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos t}\, dt \overset{\cos t = \cos^2(\frac{t}{2}) - \sin^2(\frac{t}{2})}{=} a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \Big| \cos\left(\frac{t}{2}\right) \Big| dt \\
&= 4a \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt = 8a \sin\left(\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 8a
\end{aligned}$$

b) Parabel (t, t^2), $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
s(t) &= \int_0^t \Big|\Big|(1, 2\tau)\Big|\Big| d\tau = \int_0^t \sqrt{1 + 4\tau^2} d\tau \\
&\overset{2\tau = \sinh x}{=} \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{Arsinh}(2t)} \cosh^2 x\, dx = \frac{1}{8} \Big[\sinh(2x) + \frac{1}{4} x \Big]_0^{\operatorname{Arsinh}(2t)} \\
&= \frac{1}{4} \Big(2t\sqrt{1+4t^2} + \ln(2t + \sqrt{1+4t^2}) \Big)
\end{aligned}$$

Definition 7.6 (äquivalente Parametrisierungen)

Sei $I = [a, b]$, $J = [a', b']$ und $\Phi : I \to \mathbb{R}^n$, $\Psi : J \to \mathbb{R}^n$ seien Parametrisierungen derselben Kurve $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$. Φ, Ψ heißen äquivalent ($\Phi \sim \Psi$), falls eine stetige, monoton wachsende Bijektion $h : J \to I$ existiert mit $\Psi = \Phi \circ h$.

Bemerkung

a) $\sim$ ist Äquivalenzrelation.

b) $\Phi \sim \Psi \Rightarrow L(\Phi) = L(\Psi)$, denn wenn $Z' = (t_0, \ldots, t_p)$ Zerlegung von J ist, dann ist $Z = \big(h(t_0), \ldots, h(t_p)\big)$ Zerlegung von I mit $l(Z, \Phi) = l(Z', \Psi)$.

c) Sei $\Phi^- : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ der durch $\Phi^-(t) := \Phi(a + b - t)$ definierte Weg. Dann ist $L(\Phi) = L(\Phi^-)$ (Übung), aber $\Phi \nsim \Phi^-$.

Satz 7.7

Sei $\mathcal{C}$ eine Jordankurve und $\Phi : I \to \mathbb{R}^n, \Psi : J \to \mathbb{R}^n$ seien zwei zu $\mathcal{C}$ gehörige Wege. Dann existiert genau eine stetige Bijektion $h : J \to I$ mit $\Psi = \Phi \circ h$ und es folgt $\Phi \sim \Psi$ oder $\Phi \sim \Psi^-$.

Zusatz: Sind Φ, Ψ glatt, so ist $h \in C^1(J)$ und $h'(t) \neq 0 \; \forall t \in J$.

Folgerung:

Für eine Jordankurve $\mathcal{C}$ gibt es genau 2 Äquivalenzklassen von zugehörigen Parametrisierungen durch Jordanwege. Durch die Auswahl einer dieser Äquivalenzklassen legt man eine Orientierung von $\mathcal{C}$ fest.

Korollar 7.8

Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ Jordankurve und Φ ein zugehöriger Jordanweg. Dann ist $L(\Phi)$ unabhängig von Φ. Man definiert die Länge der Jordankurve $L(\mathcal{C}) := L(\Phi)$.

Ist Φ insbsondere stückweise C^1 dann gilt

$$L(\Phi) = \int_a^b \|\Phi'(t)\| \, dt.$$

Bemerkung:

Definition 7.6 kann man auch auf geschlossene Jordankurven übertragen. Die Aussagen in Satz 7.7 und Korollar 7.8 gelten auch für geschlossene Jordankurven. Betrachte dazu $\Phi : [a, b) \to \mathcal{C}$.

Satz 7.9 (Weglänge als Paramter)

Sei $\mathcal{C}$ eine rektifizierbare Jordankurve. Dann existiert eine Parametrisierung $\Psi : [0, L(\mathcal{C})] \to \mathcal{C}$ mit der Eigenschaft $L(\Psi\big|_{[0,s]}) = s$. Ist $\mathcal{C}$ glatt, dann ist Ψ stetig differenzierbar mit $\|\Psi'(s)\| = 1$.

Beispiel:

$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}, \quad \Phi(t) := \big(\cos\sqrt{t}, \sin\sqrt{t}\big), \quad t \in [0, 4\pi^2]$

$\|\Phi'(t)\| = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. Die Weglängenfunktion ist gegeben durch $s(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\tau}} d\tau = \sqrt{t}$

$\Psi(s) = \Phi(s^2) = \big(\cos s, \sin s\big)$, $s =$ Weglänge als Parameter, $s \in [0, 2\pi], \quad \|\Psi'(s)\| = 1$

7.2 Kurven- und Wegintegrale

Definition 7.10 (Kurvenintegral)

Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ eine stückweise C^1-Jordankurve, $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ zugehöriger stückweiser C^1-Jordanweg und $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann heißt

$$\int^{\mathcal{C}} f\, ds := \int_a^b f(\Phi(t))\|\Phi'(t)\|\, dt$$

Kurvenintegral von f über der Kurve $\mathcal{C}$.

Definition 7.11

Der Weg $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sei stückweise C^1 und $f : \Phi(I) \to \mathbb{R}$ bzw. $F : \Phi(I) \to \mathbb{R}^n$, $F = (F_1, \dots, F_n)$ seien stetig. Dann heißt:

$$\int^{\Phi} f(x) dx_k := \int_a^b f(\Phi(t))\Phi_k'(t)\, dt$$

Wegintegral von f bezüglich x_k längs Φ und

$$\int^{\Phi} F(x) \cdot dx = \int^{\Phi} F_1 dx_1 + \ldots + F_n dx_n := \sum_{k=1}^{n} \int^{\Phi} F_k(x) dx_k = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b F_k(\Phi(t))\Phi_k'(t)\, dt$$

Wegintegral von F längs Φ.

Satz 7.12

a) Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ eine stückweise C^1-Jordankurve und $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $\int^{\mathcal{C}} f ds$ unabhängig von der gewählten Parametrisierung durch einen stückweise C^1-Jordanweg Φ.

b) Die Wege Φ, Ψ seien stückweise C^1 mit $\Phi \sim \Psi$ ($\Phi \sim \Psi^-$). Ist $\mathcal{C} := \mathrm{Bild}\,\Phi = \mathrm{Bild}\,\Psi$ und $F : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$ stetig dann gilt

$$\int^{\Phi} F \cdot dx = \int^{\Psi} F \cdot dx \qquad \Big(\int^{\Phi} F \cdot dx = -\int^{\Psi} F \cdot dx\Big).$$

Satz 7.13 (Weitere Eigenschaften)

	Sei $\mathcal{C}$ eine stückweise C^1 Jordan-Kurve und Φ ein zugehöriger stückweise C^1-Jordan-Weg. $f, g : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ seien stetig.	*Der Weg $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sei stückweise C^1 $F, G : \Phi([a,b]) \to \mathbb{R}^n$ seien stetig.*
(a)	$\left\lvert \int^{\mathcal{C}} f ds \right\rvert \leq L(\mathcal{C}) \max_{\mathcal{C}} \lvert f \rvert$	$\left\lvert \int^{\Phi} F \cdot dx \right\rvert \leq L(\Phi) \cdot \max_{[a,b]} \lVert F \circ \Phi \rVert$
(b)	$\int^{\mathcal{C}} (\lambda f + \mu g) dx = \lambda \int^{\mathcal{C}} f dx + \mu \int^{\mathcal{C}} g dx$	$\int^{\Phi} (\lambda F + \mu G) \cdot dx = \lambda \int^{\Phi} F \cdot dx + \mu \int^{\Phi} G \cdot dx$
(c)	*$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ seien stückweise C^1-Jordan-Kurven, die nur einen Endpunkt gemeinsam haben, $\mathcal{C} := \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Dann gilt:* $\int^{\mathcal{C}} f ds = \int^{\mathcal{C}_1} f ds + \int^{\mathcal{C}_2} f ds$	*Φ_1, Φ_2 seien stückweise C^1, es gelten die Voraussetzung von Prop. 7.3(d), $\Phi := \Phi_1 \oplus \Phi_2$. Dann gilt:* $\int^{\Phi} F \cdot dx = \int^{\Phi_1} F \cdot dx + \int^{\Phi_2} F \cdot dx$

7.3 Konservative Vektorfelder

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $F : D \to \mathbb{R}^n$ heißt Vektorfeld.

Definition 7.14

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein Vektorfeld $F : D \to \mathbb{R}^n$ heißt:

a) *Gradientenfeld, falls eine stetig differenzierbare Funktion $V : D \to \mathbb{R}$ existiert mit $F = \nabla V$. In diesem Fall heißt V Stammfunktion oder Potential von F.*

b) *konservativ, falls für jeden in D verlaufenden stückweisen C^1-Weg $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ das Wegintegral $\int^{\Phi} F \cdot dx$ nur von $\Phi(a)$ und $\Phi(b)$ abhängt. Schreibweise $\int^{\Phi} F \cdot dx = \int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} F \cdot dx$*

Satz 7.15

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet (vgl. Exkurs Kapitel 3) und $F : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann gilt:

$$F \text{ konservativ } \Leftrightarrow F \text{ ist ein Gradientenfeld}$$

In diesem Fall gilt außerdem:

a) $V(x) := \int^{\Phi} F(y) \cdot dy$ *ist Stammfunktion von* F*, wobei* Φ *ein beliebiger stückweiser* C^1*-Weg von einem festen Punkt* $\xi \in D$ *nach* $x \in D$ *ist.*

b) Für jede Stammfunktion V *von* F *gilt* $\int^{\Phi} F(y) \cdot dy = V(x) - V(\xi)$*, falls* Φ *ein stückweiser* C^1 *Weg von* ξ *nach* x *ist.*

Frage: Wie erkennt man, ob ein Vektorfeld ein Gradientenfeld ist?

Angenommen, $F = \nabla V = (F_1, \ldots, F_n),\ V \in C^2(D)$.

Dann gilt nach dem Satz von Schwarz: $V_{x_i x_j} = V_{x_j x_i}$, d.h. $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)$ für $i, j = 1, \ldots, n$.

Ist diese Bedingung hinreichend dafür, dass F ein Gradientenfeld ist?

Definition 7.16

Eine offene Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ *heißt sternförmiges Gebiet (Sterngebiet), falls* $x_0 \in D$ *existiert, sodass* $\forall x \in D$ *gilt, daß die Verbindungsstrecke von* $x, x_0 = S_{xx_0} \subset D$ *ist.*

Satz 7.17

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ *ein Sterngebiet und* $F : D \to \mathbb{R}^n$ *sei ein Vektorfeld mit* $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ *für alle* $i, j = 1, \ldots, n$*. Dann ist* F *ein Gradientenfeld.*

Der folgende Satz scheint inhaltlich ohne Zusammenhang zum vorherigen Thema. Er wird aber im Beweis von Satz 7.17 gebraucht und ist auch sonst immer dann nützlich, wenn man ein parameterabhängiges Integral vorliegen hat, bei dem man Differentiation und Integration gerne vertauschen möchte.

Satz 7.18 *Sei* $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $g : \begin{cases} D \times [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & g(x,t) \end{cases}$ *sei stetig und stetig partiell nach* $x \in D$ *differenzierbar. Dann gilt für alle* $x \in D$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_a^b g(x,t)\, dt = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x_i}(x,t)\, dt,$$

d.h. Integration und partielle Differentiation sind vertauschbar.

8 Gewöhnliche Differentialgleichungen

8.1 Motivation: „Was ist eine Differentialgleichung?"

Für $t \in [0, \infty)$ sei $u(t)$ die Anzahl der Individuen einer Population zur Zeit t.

Ziel: Die Beschreibung des zeitlichen Verlaufs von $u(t)$ als Funktion von t.

Sei Δt ein Zeitraum (1 Jahr, 1 Monat,...). Dann gilt

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t \cdot \rho,$$

wobei ρ die effektive Reproduktionsrate, d.h. $\frac{\text{Anzahl(Geburten - Todesfälle)}}{\Delta t}$ ist.

$$\frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} = \rho\big(t, \Delta t, u(t)\big)$$

Der Limes $\Delta t \to 0$ liefert ein vereinfachtes (idealisiertes) Modell:

$$\boxed{\dot{u}(t) = \frac{du(t)}{dt} = \rho\big(t, u(t)\big)}$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung. Dabei ist: $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene/bekannte Funktion, die die Abhängigkeit der effektiven Reproduktionsrate von der Zeit t und der Populationsgröße u beschreibt. Gesucht ist die Lösung u der Differentialgleichung, wenn man zum Zeitpunkt $t = 0$ die Populationsgröße $u(0)$ kennt.

Beispiel (Modell des Populationswachstums von Verhulst, 1837):

$\chi(t, u) := \frac{\rho(t,u)}{u}$ = effektive Pro-Kopf Produktionsrate = $\alpha - \beta u, \quad \alpha, \beta \geq 0$

Fall $\beta = 0$ (konstante Pro-Kopf Reproduktionsrate):

$$\dot{u} = \alpha u, \qquad \text{allgemeine Lösung: } u(t) = Ae^{\alpha t},\ A \in \mathbb{R}$$

$\Big[$Grund: $\frac{d}{dt}(e^{-\alpha t} u) = 0$, also $u(t) =$const$\cdot e^{\alpha t}\Big]$

Dabei ist die Konstante $A =$ Populationsgröße zum Zeitpunkt $t = 0$.

Die Population wächst exponentiell ($\alpha > 0$) oder fällt exponentiell ($\alpha < 0$).

Fall $\beta > 0$:

Die effektive Pro-Kopf Reproduktionsrate ist fallend in u (dies modelliert die Ressourcenverknappung)

$$\dot{u} = u(\alpha - \beta u) \quad \text{heißt logistische Differentialgleichung}$$

Setze $v(t) := \frac{\beta}{\alpha} u(\frac{1}{\alpha} t)$ und berechne die neue Differentialgleichung für $v(t)$:

$$\dot{v}(t) = \frac{\beta}{\alpha^2} u(t)\big(\alpha - \beta u(t)\big) = \frac{\beta}{\alpha}\Big(1 - \frac{\beta}{\alpha}\Big) = v(t)\big(1 - v(t)\big)$$

Es gibt die trivialen Lösungen $v \equiv 1,\ v \equiv 0$

Nichttriviale positive Lösungen:

$\frac{dv}{dt} = v(1-v) \Rightarrow \frac{dv}{v(1-v)} = dt$

$$\underbrace{\int \frac{dv}{v(1-v)}}_{\int \frac{1}{1-v} + \frac{1}{v}} = \int dt = t + const.$$

$$\int \frac{1}{1-v} + \frac{1}{v} = \ln v - \ln|1-v| = \ln\Big(\frac{v}{|1-v|}\Big)$$

$$\Rightarrow \frac{v}{|1-v|} = e^{t+const.} = ce^t$$

Ergebnis:

$$v(t) = \begin{cases} \dfrac{ce^t}{1+ce^t} & c > 0,\ \text{falls } v(0) \in (0,1) \\ \dfrac{ce^t}{ce^t - 1} & , c > 1,\ \text{falls } v(0) \in (1,\infty) \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\beta} \cdot \dfrac{ce^{\frac{\alpha}{t}}}{1+ce^{\frac{t}{\alpha}}} & ,\ \text{falls } u(0) \in (0, \frac{\alpha}{\beta}) \\ \dfrac{\alpha}{\beta} \cdot \dfrac{ce^{\frac{t}{\alpha}}}{ce^{\frac{t}{\alpha}} - 1} & ,\ \text{falls } u(0) \in (\frac{\alpha}{\beta}, \infty) \end{cases}$$

Wähle $c > 0$ so, dass $u(0) =$ Populationsgrösse zum festen Zeitpunkt $t = 0$. Mann kann auch die Populationsgröße zu einem anderen Zeitpunkt $t_0 \neq 0$ vorschreiben, und dann die Konstante $c > 0$ anpassen.

Eigenschaften der Lösungen:

$\lim_{t \to \infty} u(t) = \frac{\alpha}{\beta} =$ Tragekapazität der Umwelt

$u(t)$ ist monoton wachsend, solange $u(t) < \frac{\alpha}{\beta}$

$u(t)$ ist monoton fallend, solange $u(t) > \frac{\alpha}{\beta}$

Man beachte: zwei verschiedene Lösungen kreuzen sich nie!

8.2 Explizite skalare Differentialgleichung erster Ordnung

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. Die Differentialgleichung

$$y' = f(x,y) \tag{1}$$

heißt explizite skalare Differentialgleichung erster Ordnung.

Ist zusätzlich $(\xi, \eta) \in D$ gegeben, so heißt

$$y' = f(x,y),\ y(\xi) = \eta \tag{2}$$

Anfangswertproblem zu (1).

Definition 8.1 *Eine auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gegebene Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ heißt Lösung von (1), falls*

a) y auf I differenzierbar ist und $\operatorname{graph} y := \Big\{\big(x, y(x)\big), x \in I\Big\} \subset D$,

b) $y'(x) = f\big(x, y(x)\big)$ gilt $\forall x \in I$.

y heißt Lösung des Anfangswertproblems (2), falls zusätzlich gilt

c) $\xi \in I$ und $y(\xi) = \eta$.

Spezialfall (Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen):

$$y' = f(x)g(y), \quad y(\xi) = \eta \tag{3}$$

Lösungsmethode (Begündung folgt im Satz 8.2):
$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$, $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

bzw.

$$\int_{\eta}^{y(x)} \frac{ds}{g(s)} = \int_{\xi}^{x} f(t)dt \tag{4}$$

für die Lösung des Anfangswertproblems.

Satz 8.2

Seien I_x, I_y Intervalle und $\xi \in I_x$, $\eta \in I_y$. Die Funktionen $f : I_x \to \mathbb{R}$, $g : I_y \to \mathbb{R}$ seien stetig. Falls $g(\eta) \neq 0$, dann existiert eine Umgebung I von ξ, in der (3) genau eine Lösung hat. Man erhält die Lösung durch Auflösen von (4) nach $y(x)$.

Beispiele:

a) $y' = y^2$, $y(0) = 1$

$\dfrac{dy}{y^2} = dx, \quad \displaystyle\int_1^{y(x)} \frac{1}{s^2} dx = x$, d.h. $\dfrac{-1}{y(x)} + 1 = x, \quad y(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Die Lösung existiert auf dem Intervall $(-\infty, 1)$

b) $y' = \sqrt{|y|}, \quad y \equiv 0$ ist Lösung.

betrachte positive Lösungen:

$\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx, \quad 2\sqrt{y(x)} = x + c \Rightarrow y(x) = \Big(\frac{x+c}{2}\Big)^2, \quad x > -c$

Konstruktion negativer Lösungen:

$z(x) := -y(-x)$ löst die Differentialgleichung, denn $z'(x) = y'(-x) = \sqrt{y(-x)} = \sqrt{|z(x)|}$

Zusammenkleben von Lösungen:

z.B.: $\Phi_a(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & x \geq 0 \\ 0 & -a \leq x \leq 0 \\ -\frac{(x+a)^2}{4} & x \leq -a \end{cases}, \qquad a > 0.$

oder $\Psi(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

Insbesondere hat das Anfangswertproblem $y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$ unendlich viele Lösungen.

Definition 8.3

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall und $g, h \in C(I)$. Die Differentialgleichung

$$y' + g(x)y = 0, \; x \in I \tag{H}$$

heißt homogene, lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Für $h \neq 0$ heißt

$$y' + g(x)y = h(x), \; x \in I \tag{I}$$

inhomogene, lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

Satz 8.4 (Lösung der homogenen Gleichung)

Sei $I \subset \mathbb{R}$, $g \in C(I)$. Die allgemeine Lösung von (H) ist

$$y(x) = ce^{-\int_\xi^x g(t)dt}, \; \xi \in I, \; c \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems (H) mit $y(\xi) = \eta$ ist

$$y(x) = \eta e^{-\int_\xi^x g(t)dt}.$$

Satz 8.5 (Lösung der inhomogenen Gleichung)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall und $g, h \in C(I)$.

a) Die allgemeine Lösung von (I) hat die Form

$$y(x) = \underbrace{y_h(x)}_{\text{allgemeine Lösung von (H)}} + \underbrace{y_p(x)}_{\text{eine partikuläre Lösung von (I)}}$$

b) Man erhält für die allgemeine Lösung von (I):

$$(\star) \qquad y(x) = e^{-G(x)}\left(c + \int_\xi^x h(t)e^{G(t)}\,dt\right),\ G(t) := \int_\xi^t g(s)\,ds \ \textit{mit}\ \xi \in I, c \in \mathbb{R}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems (I) mit $y(\xi) = \eta$ lautet

$$(\star\star) \qquad y(x) = e^{-G(x)}\left(\eta + \int_\xi^x h(t)e^{G(t)}dt\right).$$

Bemerkung: Die Lösungsmethode ist wichtiger als die Lösungsformel.

Beispiel: $y' + y\sin x = \sin^3 x$

homogene Gleichung: $y' + y\sin x = 0, \quad y_h(x) = e^{-\int \sin x dx} = ce^{\cos x}$, $c \in \mathbb{R}$.

inhomogene Gleichung: $y' + y\sin x = \sin^3 x$, Ansatz: $y_p(x) = c(x)e^{\cos x}$

$c'(x)e^{\cos x} = \sin^3 x$

$$\begin{aligned} c(x) &= \int e^{-\cos x}\sin^3 x dx && \underset{dt=-\sin x dx}{\overset{t=\cos x}{=}} && \int e^{-t}(t^2-1)dt \\ &= -e^{-t}(t^2-1) + \int e^{-t}2tdt && = && -e^{-t}(t^2-1) - 2te^{-t} + 2\int e^{-t}dt \\ &= e^{-t}(1-t^2-2t-2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow y_p(x) = e^{\cos x}\cdot e^{-\cos x}(\sin^2 x - 2\cos x - 2) = \sin^2 x - 2\cos x - 2$

allgemeine Lösung: $y(x) = \sin^2 x - 2\cos x - 2 + ce^{\cos x}$, $c \in \mathbb{R}$.

8.3 Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung

Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Elemente des $\mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnen wir mit $(x, y) = (x, y_1, \ldots, y_n)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Ferner sei eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^n$ gegeben, deren Komponentenfunktionen wie folgt beschrieben werden:

$$f(x,y) = \Big(f_1(x, y_1, \ldots, y_n), f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(x, y_1, \ldots, y_n)\Big)$$

Dann heißt

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{rcl} y_1' &=& f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y_2' &=& f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\vdots& \\ y_n' &=& f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{array}\right. \qquad \text{kurz } y' = f(x,y)$$

System von Differentialgleichungen erster Ordnung. Ist zusätzlich $(\xi, \eta) \in D$ gegeben, so heißt

$$y' = f(x, y), \; y(\xi) = \eta \tag{2}$$

Anfangswertproblem zu (1).

Definition 8.6 *Eine auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gegebene Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$ heißt Lösung von (1), falls*

a) y auf I differenzierbar ist und $\operatorname{graph} y := \Big\{\big(x, y(x)\big), x \in I\Big\} \subset D$,

b) $y'(x) = f\big(x, y(x)\big)$ gilt $\forall x \in I$.

y heißt Lösung des Anfangswertproblems (2), falls zusätzlich gilt

c) $\xi \in I$ und $y(\xi) = \eta$.

Beispiel (Räuber-Beute-Modell von A. Lotka und V. Volterra):

$u(t) :=$Größe der Beutepopulation zur Zeit t

$v(t) :=$Größe der Räuberpopulation zur Zeit t

$\dot{u}(t) = u(t)\chi\big(t, u(t), v(t)\big), \quad \chi =$effektive Pro-Kopf Reproduktionsrate Beute

$\dot{v}(t) = v(t)\lambda\big(t, u(t), v(t)\big), \quad \lambda =$effektive Pro-Kopf Reproduktionsrate Räuber

Einfachstes Modell:

$$\chi(t, u, v) = a - bv, \quad a, b \geq 0$$
$$\chi(t, u, v) = -c + du, \quad c, d \geq 0$$

Führt auf ein System erster Ordnung:

$$\dot{u} = u(a - bv)$$
$$\dot{v} = v(-c + du)$$

Bemerkung:

In Abwesenheit der Räuber ($v \equiv 0$) führt $\dot{u} = au$ zum exponentiellen Wachstum der Beute.

In Abwesenheit der Beute ($u \equiv 0$) führt $\dot{v} = -cv$ zum exponentiellen Aussterben der Räuber.

Zurück zum AWP: (2) $y' = f(x,y), \quad y(\xi) = \eta$, mit $f : \underbrace{[\xi, \xi + a] \times \mathbb{R}^n}_{S = \text{Streifen}} \to \mathbb{R}^n$, $a > 0$

Ziel: Entwicklung einer Lösungstheorie für (2)

Lemma 8.7 *Sei $f : S \to \mathbb{R}^n$ stetig und $I = [\xi, \xi + a]$.*

a) Ist y Lösung des Anfangswertproblems (2) auf I, dann gilt

$$y(x) = \eta + \int_\xi^x f\big(t, y(t)\big) dt \quad \forall x \in I.$$

b) Ist $y \in C(I)$ Lösung der Integralgleichung

$$y(x) = \eta + \int_\xi^x f\big(t, y(t)\big) dt, \quad \forall x \in I, \tag{3}$$

dann ist $y \in C^1(I)$ und y löst Anfangswertproblems (2) auf I.

Bemerkung:

Für eine vektorwertige Funktion $g : [\xi, \xi + a] \to \mathbb{R}^n$ bedeutet

$$\int_\xi^x g(t) dt = \Big(\int_\xi^x g_1(t) dt, \ldots, \int_\xi^x g_n(t) dt \Big)$$

Ziel: Nachweis der Existenz einer Lösung von (3) mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes.

Vorbereitungen:

Sei $|\cdot|$ auf $\mathbb{R}^n$ die euklidische Norm. Betrachte für ein kompaktes Intervall $I \subset \mathbb{R}^n$ den Raum $C(I) = \Big\{ y : I \to \mathbb{R}^n, y \text{ stetig auf } I \Big\}$. Dann ist $\Big(C(I), \|\cdot\|_\infty \Big)$ mit $\|y\|_\infty = \max_{x \in I} |y(x)|$ ein Banachraum (vgl. Satz 1.19 für $n = 1$). Sei nun eine zweite Norm auf $C(I)$ erklärt durch

$$\|y\|_\alpha = \max_{x \in I} e^{-\alpha x} |y(x)|, \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ fest.}$$

Beachte: es gibt Zahlen $\rho, \sigma > 0$ mit $0 < \sigma \leq e^{-\alpha x} \leq \rho \quad \forall x \in I$, da I kompakt ist.

Es folgt: $\sigma \|y\|_\infty \leq \|y\|_\alpha \leq \rho \|y\|_\infty$, d.h. $\|\cdot\|_\alpha$ und $\|\cdot\|_\infty$ sind äquivalente Normen auf $C(I)$. Insbesondere ist $\Big(C(I), \|\cdot\|_\alpha\Big)$ ein Banachraum.

Lemma 8.8

Sei $z : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig und $|\cdot|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\Big| \int_a^b z(x)dx \Big| \leq \int_a^b |z(x)| dx.$$

Definition 8.9 *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ und $|\cdot|$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$.*

a) f heißt Lipschitz-stetig bezüglich y, falls $L > 0$ existiert mit

$$|f(x,y) - f(x,\overline{y})| \leq L|y - \overline{y}| \quad \forall (x,y), (x,\overline{y}) \in D.$$

b) f heißt lokal Lipschitz-stetig bezüglich y, falls $\forall (x_0, y_0) \in D$ ein $\delta > 0$ und ein $L > 0$ existiert mit

$$|f(x,y) - f(x,\overline{y})| \leq L|y - \overline{y}| \quad \forall (x,y), (x,\overline{y}) \in D \text{ mit } |x - x_0|, |y - y_0|, |\overline{y} - y_0| < \delta.$$

Bemerkung: Ist $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ konvex und $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n}$ beschränkt auf D, dann ist f ist Lipschitz-stetig bezüglich y (Korollar 3.16).

Satz 8.10 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz)

Sei $f : [\xi, \xi + a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und Lipschitz-stetig bezüglich y. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y' = f(x,y), \quad y(\xi) = \eta \tag{2}$$

genau eine Lösung in $[\xi, \xi + a]$.

Bemerkung:

Falls $f : [\xi - a, \xi] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig bzgl. y ist, so besitzt (2) genau eine Lösung auf $[\xi - a, \xi]$.

Satz 8.11

Sei

$$R = [\xi, \xi + a] \times [\eta_1 - b_1, \eta_1 + b_1] \times \ldots \times [\eta_n - b_n, \eta_n + b_n]$$

und $f \in C(R)$ sei Lipschitz-stetig bzgl. y auf R. Dann existiert auf $[\xi, \xi+\alpha]$ genau eine Lösung des Anfangswertproblems (2), wobei

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b_1}{A}, \ldots, \frac{b_n}{A}\right\}, \quad A = \max_{i=1,\ldots,n} \max_{(x,y)\in R} |f_i(x,y)|.$$

Beispiele:

a) $n = 1$. Betrachte das Anfangswertproblem

$$y' = \sin x e^{\arctan y}, \quad y(0) = \eta.$$

Dabei ist $f(x,y) := \sin x e^{\arctan y}$ und $S := [0,T] \times \mathbb{R}$.

$\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq \dfrac{1}{1+y^2} e^{\frac{\pi}{2}} \leq e^{\frac{\pi}{2}}$. Also ist f Lipschitz-stetig bzgl. y auf S.

Demzufolge existiert genau eine auf $[0,T]$ definierte Lösung,

Analog gilt für $S = [-T, 0] \times \mathbb{R} : \exists_1$ auf $[-T, 0]$ definierte Lösung.

b) $n = 1$. Betrachte das Anfangswertproblem

$$y' = \sin x e^{y}, \quad y(0) = \eta.$$

Dabei ist $f(x,y) := \sin x e^y$ und $S = [0,T] \times \mathbb{R}$.

$f(x,y)$ ist nicht Lipschitz-stetig bzgl. y auf S. Allerdings ist $f(x,y)$ auf der Menge $R := [0,T] \times [\eta - b, \eta + b]$ Lipschitz-stetig bzgl. y.

$$A = \max_{(x,y)\in\mathbb{R}} |f(x,y)| \leq e^{\eta+b}, \quad \alpha = \min\left\{T, \frac{b}{e^{\eta+b}}\right\}$$

Also existiert genau eine Lösung auf $[0, \alpha]$.

Lemma 8.12 *Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^{n+1}$ stetig. Betrachte die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$.*

a) Ist y Lösung auf (a, b) und $\operatorname{graph}(y) = \Big\{\big(x, y(x)\big) : x \in (a, b)\Big\} \subset A \subset D$ und A kompakt, dann lässt sich y als Lösung auf $[a, b]$ fortsetzen.

b) y sei Lösung auf $[a, c]$ und z sei Lösung auf $[c, b]$ mit $y(c) = z(c)$.

Dann ist $w(x) = \begin{cases} y(x), & a \le x \le c \\ z(x), & c \le x \le b \end{cases}$ Lösung auf $[a, c]$.

Satz 8.13 (Lokale eindeutige Lösbarkeit)

Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. y. Dann besitzt das Anfangswertproblem (2) eine eindeutige „lokale“ Lösung, d.h $\exists \epsilon > 0$, sodass auf $[\xi - \epsilon, \xi + \epsilon]$ genau eine Lösung von (2) existiert.

Ziel: Fortsetzung einer „lokalen“ Lösung des Anfangswertproblems auf möglichst große Existenzintervalle.

Definition 8.14

Eine Lösung y des Anfangswertproblems (2) auf dem Intervall I heißt nicht-fortsetzbar, falls für jede Lösung $\overline{y}$ von (2), die auf dem Intervall $\overline{I}$ definiert ist, gilt:

$$\overline{I} \subset I \text{ und } y\Big|_{\overline{I}} = \overline{y}.$$

Satz 8.15 (Existenz nicht fortsetzbarer Lösungen)

Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. y. Dann besitzt das Anfangswertproblem (2) eine eindeutige, nicht fortsetzbare Lösung.

Satz 8.16

Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^{n+1}$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. y. Für die eindeutige, nicht fortsetzbare Lösung y von (2) gilt:

a) *y existiert „nach rechts“ auf $[\xi, b)$ $\quad$ ($b = \infty$) zugelassen.*

b) *Es gilt*

(i) $b = \infty$

oder

(ii) $b < \infty$ *und* $\lim\limits_{x \to b-} |y(x)| = \infty$

oder

(iii) $b < \infty$ *und* $\operatorname{dist}\big((x, y(x)), \partial D\big) \overset{x \to b-}{\to} 0$

Beispiel: (n=1)

$y' = y,$	$y(0) = 1,$	$D = \mathbb{R}^2$	$y(x) = e^x$ ex. auf $[0, \infty)$	Fall (i)
$y' = y^2,$	$y(0) = 1,$	$D = \mathbb{R}^2$	$y(x) = \frac{1}{1-x}$ ex. auf $[0, 1)$	Fall (ii)
$y' = \frac{1}{1-x} y,$	$y(0) = 1,$	$D = (-\infty, 1) \times \mathbb{R}$	$y(x) = \frac{1}{1-x}$ ex. auf $[0, 1)$	Fall (ii) und (iii)
$y' = -\frac{1}{2y},$	$y(0) = 1,$	$D = \mathbb{R} \times (0, \infty)$	$y(x) = \sqrt{1-x}$ ex. auf $[0, 1)$	Fall (iii)

8.4 Homogene Lineare Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Schreibweise:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine $n \times n$-Matrix, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$. Wir betrachten Lösungen $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ von $(-\infty, \infty) \to \mathbb{C}^n$ (komplexwertige Lösungen sind hier zulässig) der Differentialgleichung

$$y' = Ay. \tag{H}$$

Ziel: Bestimmung aller Lösungen von (H)

Beachte: Für $f(t, y) := Ay$ gilt $|f(t, y) - f(t, \overline{y})| = |A(y - \overline{y})| \leq \|A\| \cdot |y - \overline{y}|$, d.h. die Funktion $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ ist Lipschitz-stetig bzgl. y.

Lemma 8.17 *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.*

a) Falls $\mu \in \mathbb{C}$ Eigenwert von A mit Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^n$ ist, dann löst $e^{\mu t}v$ die Differentialgeichung (H). Ist $\mu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, so sind $\mathrm{Re}(e^{\mu t}v)$, $\mathrm{Im}(e^{\mu t}v)$ linear unabhängige reelle Lösungen von (H).

b) Falls A komplex diagonalisierbar ist, d.h. falls eine Basis des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von A existiert, dann lässt sich jede Lösung von (H) schreiben als

$$y(t) = \sum_{i=1}^{p} e^{\mu_i t} v_i,$$

wobei $\mu_1, \ldots, \mu_p$ die (paarweise verschiedenen) Eigenwerte von A sind und $v_i \in$ Kern$(A - \mu_i \,\mathrm{Id})$.

Lemma 8.18 *Sei $J = \begin{pmatrix} \mu & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \mu \end{pmatrix}$ eine $r \times r$-Matrix, $\mu \in \mathbb{C}$, in Gestalt eines Jordankästchens. Dann ist die allgemeine Lösung $w(t)$ der Differentialgleichung*

$$w' = Jw$$

gegeben durch Linearkombinationen der r Lösungen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} e^{\mu t}, \quad \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} e^{\mu t}, \quad \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} \\ t \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} e^{\mu t}, \ldots, \begin{pmatrix} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} \\ \vdots \\ \frac{t^2}{2} \\ t \\ 1 \end{pmatrix} e^{\mu t}$$

Satz 8.19

Sei $\mu \in \mathbb{C}$ k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A. Dann existieren k Lösungen von (H) der Form

$$y^i(t) = P^i(t)e^{\,\mu t}, \quad i = 1, \dots, k, \quad \textit{wobei}$$

$P^i(t) = \left(p_1^i(t), \dots, p_n^i(t)\right)^T$, *$p_j^i(t)$ = Polynom vom Grad $\leq i-1$. Der höchste auftretende Polynomgrad = (Größe des größten Jordankästchens zum Eigenwert μ)-1.*

Praktische Berechnung der Lösungen:

I) Berechnung der Matrix C mit $B = CAC^{-1}$, B = Jordan-Normalform von A und Verwendung von Lemma 8.18

oder

II) direkte Berechnung von k Lösungen wie folgt:

1. Schritt $y(t) = ve^{\mu t}$, $\quad v$ Eigenvektor zum Eigenwert μ.

2. Schritt $y(t) = (a_1 + a_2 t)e^{\mu t}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^n$. Bestimme a_1, a_2 durch Koeffizientenvergleich: $y'(t) = [\mu(a_1 + a_2 t) + a_2]e^{\mu t} = e^{\mu t}A(a_1 + a_2 t)$

   Notwendigerweise a_2 = Eigenvektor zum Eigenwert μ. Bestimme a_1.

3. Schritt $y(t) = (b_1 + b_2 t + vt^2)e^{\mu t}$, etc. Bestimme b_2, b_1 durch Koeffizientenvergleich

k. Schritt $y(t) = (c_1 + c_2 t + \ldots + c_{k-1}t^{k-2} + vt^{k-1})e^{\mu t}$

   bestimme $c_k, \dots, c_1$ durch Koeffizientenvergleich.

Beispiel:

$$y' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det(\mu \operatorname{Id} - A) = (\mu+1)^2(\mu-1)$$

$\mu = 1$: Eigenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, Lösung: $e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mu = -1$: Eigenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, Lösung: $e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ansatz für 2. Lösung zum Eigenwert -1:

$$y = \left[a + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] e^{-t}$$

$$y' = \left[-\left(a + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] e^{-t} = \left[Aa - t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] e^{-t}$$

Demzufolge muss a Lösung des folgenden Gleichungssystems sein

$$-a + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = Aa.$$

Also lösen wir das LGS:

$$(A + E)a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten als Ergebnis: $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{neu}} + \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

Die zwiete Lösung zum Eigenwert -1 ist also:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) e^{-t}$$

Berechnung reellwertiger Lösungen

Ist $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ein Eigenwert der reellen $n \times n$-Matrix A, dann auch $\overline{\mu}$. Aus k Lösungen der Form $P(t)e^{\mu t}$ werden durch $\mathrm{Re}(P(t)e^{\mu t})$ und $\mathrm{Im}(P(t)e^{\mu t})$ $2k$ reellwertige Lösungen.

8.5 Allgemeine Theorie linearer Systeme

$$y' = A(t)y \tag{H}$$

$$y' = A(t)y + b(t) \tag{I}$$

wobei $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n},\ b : I \to \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen sind und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

Lemma 8.20 *Das Anfangswertproblem (I) mit $y(\tau) = \eta$ und $\tau \in I$ besitzt genau eine Lösung auf I.*

Definition 8.21
Ein System $\left\{y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}\right\}$ von n linear unabhängigen Lösungen $y^{(i)}(t)$, $i = 1, \ldots, n$ von (H) heißt Fundamentalsystem. Schreibweise als Matrix (Fundamentalmatrix):

$$Y(t) = \left(y^{(1)}(t)\Big| \ldots \Big|y^{(n)}(t)\right), \qquad y^{(i)}(t) = \text{ Spaltenvektor.}$$

Satz 8.22

a) $\exists$ reellwertiges Fundamentalsystem für (H).

b) Die reellwertigen Lösungen von (H) bilden einen n-dimensionalen Unterraum von $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Lemma 8.23 *Ist $Y(t)$ Fundamentalmatrix von (H), so ist $Y(t)$ invertierbar $\forall t \in I$.*

Satz 8.24 (Lösung des inhomogenen Systems, Variation der Konstanten)
Sei $Y(t)$ Fundamentalmatrix zu (H). Dann ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = A(t)y + b(t),\ y(\tau) = \eta$$

gegeben durch

$$y(t) = Y(t)Y^{-1}(\tau)\eta + \int_\tau^t Y(t)Y^{-1}(s)b(s)ds.$$

8.6 Explizite skalare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Sei $u : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differentierbar. Für die i-ten Ableitungen nach x führen wir folgende Schreibweise ein:

$$u^{(i)}(x) = \frac{d^i}{dx^i}u(x)$$

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. Dann heißt

$$u^{(n)} = f(x, u, u', \ldots, u^{(n-1)}) \tag{1}$$

explizite skalare Differentialgleichung n-ter Ordnung und

$$u^{(n)} = f(x, u, u', \ldots, u^{(n-1)}),\ u(\xi) = \eta_0,\ u'(\xi) = \eta_1, \ldots, u^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1} \tag{2}$$

mit $(\xi, \eta_0, \ldots, \eta_{n-1}) \in D$ heißt zugehöriges Anfangswertproblem.

Transformation auf ein System erster Ordnung

$$(1)\ u^{(n)} = f(x, u, u', \ldots, u^{(n-1)}) \Leftrightarrow (3) \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

Es gilt: $u(x) \in C^n(I)$ ist Lösung von (1) $\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$ ist Lösung von (3).

Ferner gilt: $\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \in C(I)$ ist Lösung von (3) $\Rightarrow u(x) := y_1(x)$ ist Lösung von (1).

Die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0 \tag{H}$$
$$u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)u' + a_0(x)u = b(x) \tag{I}$$

$a_i, b : I \to \mathbb{R}$ stetig. Da zugehörige System lautet:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \\ -a_{n-1}(x)y_n - \ldots - a_0(x)y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$
$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & \ldots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}}_{=:A(x)} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Die Lösungen von (H) bilden einen n-dimensionalen Unterraum von $C^n(I)$; eine Basis heißt Fundamentalsystem.

Satz 8.25

Für die homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit <u>konstanten</u> Koeffizienten sei $\mu_0 \in \mathbb{C}$ k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p(\mu)$ von A, d.h.

$$p(\mu) = a_0 + a_1\mu + \ldots + a_{n-1}\mu^{n-1} + \mu^n.$$

Dann besitzt (H) die k linear unabhängigen Lösungen $e^{\mu_0 x}, xe^{\mu_0 x}, \ldots, x^{k-1}e^{\mu_0 x}$. Ist $\mu_0 = \alpha + \imath\beta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, so entsprechen der komplexwertigen Lösung $x^i e^{\mu_0 x}$ die beiden reellwertigen Lösungen $x^i e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ und $x^i e^{\alpha x}\sin(\beta x)$.

Satz 8.26

Die homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung auf dem Intervall I mit stetigen Koeffizienten besitzt ein reelles Fundamentalsystem. Die reellwertigen Lösungen bilden einen n-dimensionalen Unterraum von $C^n(I;\mathbb{R})$.

Nun berechnen wir die Lösungen der inhomogenen Gleichung (I):

Sei $Y(t)$ Fundamentalmatrix des zugehörigen Systems. Dann gilt nach der Formel von der Variation der Konstanten (vgl. Satz 8.24):

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = Y(x)Y^{-1}(\xi) \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \vdots \\ \eta_{n-1} \end{pmatrix} + \int_\xi^x Y(x)Y^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(s) \end{pmatrix} ds$$

Demzufolge ist $u(x) := y_1(x)$ dann partikuläre Lösung von (I).

Es gilt: Allgemeine Lösung von (I) = $\underbrace{u_h}_{\text{allgemeine Lösung von (H)}} + \underbrace{u_p}_{\text{partikuläre Lösung von (I)}}$

Beispiel:

a) $u^{(iv)} - 2u''' + 2u'' - 2u' + u = 0,\ p(\mu) = \mu^4 - 2\mu^3 + 2\mu^2 - 2\mu + 1 = (\mu-1)^2(\mu^2+1)$

Lösungen: $e^x, xe^x, e^{ix}, e^{-ix}$

reelle Lösungen: $e^x, xe^x, \cos x, \sin x$

b) $u'' + 2au' + bu = 0$ (gedämpfter harmonischer Oszillator)

charakteristisches Polynom: $p(\mu) = \mu^2 + 2a\mu + b$ mit $a, b > 0$.

Nullstellen: $\mu_{1/2} = -1 \pm \sqrt{a^2 - b}$.

1. Fall $a^2 > b:\ e^{(-a\pm\sqrt{a^2-b})x} \overset{x\to\infty}{\to} 0$ (Kriechfall)
2. Fall $a^2 = b:\ e^{-ax}, xe^{-ax} \overset{x\to\infty}{\to} 0$ (aperiodischer Grenzfall)
3. Fall $a^2 < b:\ e^{-ax}\cos(\sqrt{b-a^2}x), e^{-ax}\sin(\sqrt{b-a^2}x)$ (Schwingfall), gedämpfte Schwingung der Periode $\dfrac{2\pi}{\sqrt{b-a^2}}$

Inhomogener Fall zu 2. ($a^2 = b$):

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ -2av - bu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

Fundamentalmatrix:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^{-ax} & xe^{-ax} \\ -ae^{-ax} & (1-ax)e^{-ax} \end{pmatrix} = e^{-ax} \begin{pmatrix} 1 & x \\ -a & 1-ax \end{pmatrix}$$

Variation der Konstanten: Ansatz $c(x)Y(x)$

$$c'(x)Y(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix};\ c'(x) = e^{ax}\begin{pmatrix} 1-ax & -x \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = e^{ax}\begin{pmatrix} -x^2 \\ x \end{pmatrix}$$

$$\int e^{ax}x = \frac{e^{ax}x}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a} = e^{ax}(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2})$$

$$\int e^{ax}x^2 = \frac{e^{ax}}{a}x^2 - \frac{2}{a}\int e^{ax}x = e^{ax}\Big(-\tfrac{x^2}{a} + \tfrac{2x}{a^2} - \tfrac{2}{a^3}\Big)$$

$$c(x) = \begin{pmatrix} -\frac{x^2}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{2}{a^3} \\ \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \end{pmatrix} e^{ax}$$

Partikuläre Lösung

$$c(x)Y(x) = \begin{pmatrix} -\frac{x^2}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{2}{a^3} + \frac{x^2}{a} - \frac{x}{a^2} \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{a^2} - \frac{2}{a^3} \\ \dots \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung: $u(x) = c_1 e^{ax} + c_2 x e^{ax} + \dfrac{x}{a^2} - \dfrac{2}{a^3}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Zurück zur allgemeinen Differentialgleichung n-ter Ordnung:

$$u^{(n)} = f(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}),\ u(\xi) = \eta_0,\ u'(\xi) = \eta_1, \dots, u^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1} \tag{2}$$

Satz 8.27 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz)

a) Sei $f : [\xi, \xi + a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, Lipschitz-stetig in den hinteren n Variablen. Dann besitzt das Anfangswertproblem (2) genau eine Lösung auf $[\xi, \xi + a]$. Gleiches gilt nach links, falls $f : [\xi - a, \xi] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

b) Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen $(\xi, \eta_0, \dots, \eta_{n-1}) \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und lokal Lipschitz-stetig in den hinteren n Variablen. Dann besitzt das Anfangswertproblem (2) genau eine nicht-fortsetzbare Lösung, die nach rechts auf $[\xi, b)$ existiert mit

$b = \infty$

oder $b < \infty$ *und* $\left\| \begin{pmatrix} u(x) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \right\| \overset{x \to b-}{\to} \infty$ *oder* $\operatorname{dist}\Big(\begin{pmatrix} x \\ u(x) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \partial D \Big) \overset{x \to b-}{\to} 0$

8.7 Die Matrixexponentialfunktion

Sei $A \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ eine komplexe $n \times n$-Matrix, $\|A\| = \Big(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$.

Betrachte die Reihe (Folge der Partialsummen)

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Dabei sei $A^0 = E$ und $A^k = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{k\text{-mal}}$.

Lemma 8.28

Sei $A \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ und $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Ist $\rho > 0$ der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ und $\|A\| < \rho$, dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ konvergent in $\big(\mathbb{C}^{n\times n}, \|\cdot\|\big)$.

Mit Lemma 8.28 ist $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ für alle $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definiert.

Außderdem ist für alle $t \in \mathbb{R}$: $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$ erklärt.

Da die gliedweise abgeleitete Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{kA^k t^{k-1}}{k!}$ ebenfalls für alle $t \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ konvergiert gilt:

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = Ae^{tA}$$

Damit erhalten wir:

Satz 8.29

Sei $A \subset \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann besitzt das Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten

$$y' = Ay$$

eine reelle Fundamentalmatrix der Form $Y(t) = e^{tA}$ mit der Eigenschaft $Y(0) = E$.

Proposition 8.30 *Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$.*

a) $e^{B+C} = e^B e^C$, *falls* $BC = CB$

b) $e^{C^{-1}BC} = C^{-1}e^B C$, *falls* $\det C \neq 0$

c) $e^{\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)} = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1},\dots,e^{\lambda_n})$, *wobei* $\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

d) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

e) $e^{A(s+t)} = e^{As}e^{At}$

f) $e^{A+\lambda E} = e^\lambda e^A$

Erinnerung an Lemma 8.18

Ist $J = \begin{pmatrix} \mu & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \mu \end{pmatrix}$

dann gibt es für $w' = Jw$ ein reelles Fundamentalsystem der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \cdots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ 0 & 1 & t & & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \frac{t^2}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & t \\ 0 & 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix} e^{\mu t}.$$

Liefert e^{Jt} dasselbe Ergebnis?

$$J = \mu E + F, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad F^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{usw.}$$

Demzufolge ist

$$e^{Ft} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \cdots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & & \ddots & t \\ & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

denn $F^k = 0$ für $k \geq r$, d.h. die Exponentialreihe e^{Ft} ist nur eine endliche Summe. Also folgt $e^{Jt} = e^{\mu(E+F)t} = e^{\mu t}e^{Ft}$. Dieses Fundamentalsystem ist bereits in Lemma 8.18 erkannt worden.

9 Ausblick auf Analysis III – Flächen-/Volumenintegrale

Definition 9.1

Seien $h_1, h_2 \in C([a,b])$ mit $h_1(x) \le h_2(x)$ $\forall x \in (a,b)$. Dann heißt die Menge

$$A := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ h_1(x) \le y \le h_2(x)\Big\}$$

Normalbereich bzgl. der x-Achse und

$$B := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le y \le b,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\Big\}$$

Normalbereich bzgl. der y-Achse.

Ist $f : A \to \mathbb{R}$ bzw. $f : B \to \mathbb{R}$ stetig, so definiert man das Flächenintegral

$$\int_A f(x,y) d(x,y) = \int_a^b \Big(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y) dy\Big) dx$$

bzw.

$$\int_B f(x,y) d(x,y) = \int_a^b \Big(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx\Big) dy$$

Bemerkung:

Die Abbildung $\left\{\begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\, dy \end{array}\right.$ ist stetig, also insbesondere Riemann-integrierbar auf $[a,b]$.

Definition 9.2

Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ Normalbereich bzgl. x- oder y-Achse. Dann heißt

$$|A| = \int_A 1 d(x,y)$$

Flächeninhalt von A.

Im Falle des Normalbereichs bzgl. der x-Achse gilt

$$|A| = \int_a^b h_2(x) - h_1(x) dx$$

Dies entspricht der elementargeometrischen Vorstellung des Riemann-Integrals.

Beispiel:

1.
$$\begin{aligned} \mathbb{D}_\rho &:= \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le \rho^2\Big\} \\ &= \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -\rho\le x\le\rho,\ -\sqrt{\rho^2-x^2}\le y\le\sqrt{\rho^2-x^2}\Big\} \end{aligned}$$

$$|\mathbb{D}_\rho| = \int_{-\rho}^{\rho} 2\sqrt{\rho^2-y^2}dy = 2\rho^2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-z^2}dz \overset{z=-\cos t}{=} 2\rho^2\int_0^\pi \sin^2 t dt = \pi\rho^2,$$

denn $\int \sin^2(t) = \frac{t-\sin t\cos t}{2}$.

2. A=Dreieck im ersten Quadranten mit Eckpunkten $(0,0),(0,1),(1,0)$

$$\begin{aligned} \int_A x^2 y d(x,y) &= \int_0^1\Big(\int_0^{1-x} x^2 y dy\Big)dx = \int_0^1 x^2\frac{(1-x)^2}{2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^2(1-2x+x^2)}{2}dx = \frac{1}{10}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6} = \frac{1}{60} \end{aligned}$$

Übertragung auf 3 Dimensionen

Definition 9.3

Sei $A\subset\mathbb{R}^2$ Normalbereich bzgl. x- oder y-Achse und seien $g_1,g_2\in C(A;\mathbb{R})$. Dann heißt

$$C = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in A,\ g_1(x,y)\le z\le g_2(x,y)\Big\}$$

Normalbereich bzgl. der x,y-Ebene. Ist $f: C\to\mathbb{R}$ stetig, so definiert man

$$\int_C f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_A\Big(\int_{g_1(x,y)}^{g_2 x,y} f(x,y,z)dz\Big)d(x,y)$$

und $|C| = \int_C 1d(x,y,z)$ heißt Volumen von C.

Bemerkung:

In ähnlicher Weise erklärt man 3-dimensionale Normalbereiche bzgl. der x,z- oder y,z-Ebene.

Veranschaulichung des Volumen-Begriffs:

$A = [a,b] \times [c,d]$, d.h. $h_1(x) = c,\ h_2(x) = d$

$g_1(x,y) := 0,\ g_2(x,y) > 0$

$$|C| = \int_A g_2(x,y)d(x,y) = \int_a^b \Big(\int_c^d g_2(x,y)dy\Big)dx \approx \sum_{j=1}^n \frac{b-a}{n}\int_c^d g_2(a+\frac{j}{n}(b-a),y)dy$$

Letzteres ist gerade die Summe der Volumina von Scheiben der Dicke $\frac{b-a}{n}$, wobei die Querschnittsfläche durch $y \mapsto g(a+\frac{j}{n}(b-a),y)$, $y \in [c,d]$ gegeben ist.

Beispiel: Kugelvolumen

$$\begin{aligned} C &= \Big\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq R^2\Big\} \\ &= \Big\{(x,y) \in \mathbb{D}_R : -\sqrt{R^2-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2-x^2-y^2}\Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |C| &= \int_{\mathbb{D}_R} 2\sqrt{R^2-x^2-y^2}d(x,y) = \int_{-R}^R \Big(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 2\sqrt{R^2-x^2-y^2}dy\Big)dx \\ &= \int_{-R}^R \pi(R^2-x^2) = \pi(2R^3 - \frac{2}{3}R^3) = \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

Eigenschaften von Flächen-/Volumenintegralen

Sei A ein zwei- bzw. dreidimensionaler Normalbereich und $f,g \in C(A;\mathbb{R})$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ und $x = (x_1,x_2)$ oder $x = (x_1,x_2,x_3)$. Dann gilt:

a) $\displaystyle\int_A (\alpha f + \beta g)dx = \alpha\int_A fdx + \beta\int_A gdx$

b) $\displaystyle\Big|\int_A fdx\Big| \leq \int_A |f|dx \leq \|f\|_\infty |A|$

c) aus $f \leq g$ folgt $\displaystyle\int_A f\,dx \leq \int_A g\,dx$

Index