

Akustische Tarnkappe im inhomogenen Hintergrundmedium

Philipp Klas¹, Andreas Helfrich-Schkarbanenko¹
Young Investigator Network - Day, Karlsruhe, 12. October 2013

Zielsetzung

Unsichtbarkeit von Objekten ist eine große und spannende Herausforderung für Wissenschaftler. Ein Grundprinzip der Unsichtbarkeit ist eine Transformation, mittels der man ein Metamaterial aufstellt, das die ankommenden Wellen auf eine gewünschte Weise an dem zu versteckenden Hindernis umleitet. Wir konzentrieren uns auf ein akustisches, zeitharmonisches Streuproblem, das verwandt zum elektromagnetischen Fall ist, und stellen uns die Frage, wie eine Tarnkappe an ein *inhomogenes* Hintergrundmedium angepasst werden kann?

Modell für Wellenausbreitung

Ausgangspunkt sind die Grundgleichungen der Strömungsmechanik in $\Omega \times (0, T)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho v) &= 0 && \text{Kontinuitätsgleichung} \\ \varrho \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v &= -\nabla \tilde{p} && \text{Euler-Gleichung} \\ \tilde{p} &= \tilde{p}(\varrho) && \text{Druck-Dichte-Beziehung} \end{aligned}$$

Linearisieren und Einsetzen führen auf Wellengleichung in $\Omega \times (0, T)$:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla \tilde{p}}{\varrho} \right) - \frac{1}{\varrho_0 c^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = 0.$$

Die Annahme $\tilde{p}(t, x) = \exp(i\omega t) p(x)$ ergibt eine zeitharmonische Wellengleichung in Ω :

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla p}{\varrho} \right) + \frac{\omega^2 p}{\varrho_0 c^2} = 0.$$

Tarnkappendesign

Raumtransformation $\varphi: \Omega \setminus \{0\} \rightarrow \tilde{\Omega} \setminus \bar{B}_a(0)$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \geq b \\ \frac{b-a}{b}|x| + a, & 0 < |x| \leq b. \end{cases}$$

Für eine praktische Anwendung sind Singularitäten in den Materialparametern nachteilig. Ein φ mit einem glatteren Deformationsgradienten hilft weiter. φ angewandt auf die Wellengleichung ergibt mit dem Kompressionsmodul $B := \varrho_0 c^2$ in Ω :

$$\nabla \cdot \left(\tilde{\varrho}^{-1} \nabla \tilde{p} \right) + \frac{\omega^2}{\tilde{B}} \tilde{p} = 0,$$

mit der anisotropischen Massendichte $\tilde{\varrho}$ und dem skalaren Modul $\tilde{B}$ für die Hintergrundparameter ϱ_b, B_b :

$$\tilde{\varrho}(\tilde{r}) = \varrho_b \begin{pmatrix} \frac{\tilde{r}}{\tilde{r}-a} & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{r}-a}{\tilde{r}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}(\tilde{r}) = B_b \left(\frac{b-a}{b} \right)^2 \frac{\tilde{r}}{\tilde{r}-a}.$$

Für einen inhomogenen Hintergrund mit $\varrho_b = \varrho_b^\pm$ bzw. $B_b = B_b^\pm$ in $\Omega^\pm$ erhält man so

$$\tilde{\varrho}(\tilde{r}) = \varrho_b^\pm \begin{pmatrix} \frac{\tilde{r}}{\tilde{r}-a} & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{r}-a}{\tilde{r}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}(\tilde{r}) = B_b^\pm \left(\frac{b-a}{b} \right)^2 \frac{\tilde{r}}{\tilde{r}-a}.$$

Am Innenrand der Tarnkappe herrscht die homogene Neumann-Randbedingung $\partial p / \partial n = 0$.

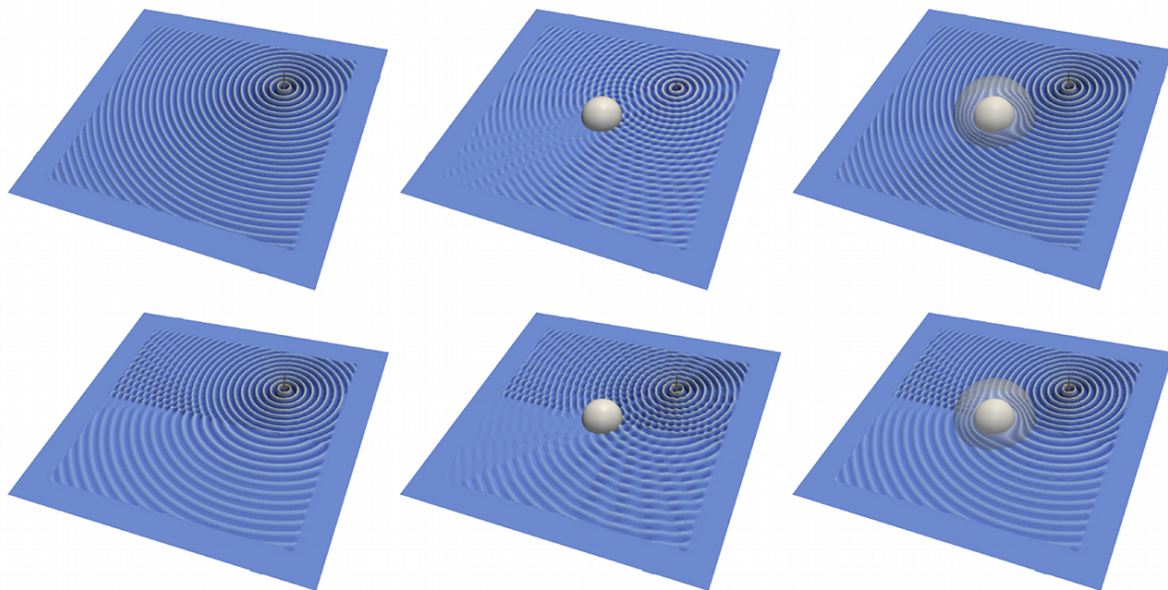


Abbildung 1: Verhüllen eines akustischen Streuobjektes in einem homogenen (oben) und einem inhomogenen Hintergrundmedium (unten).

Ergebnisse

Wir zeigen auf, wie eine mittels Transformationsoptik aufgestellte Tarnkappe an ein inhomogenes Hintergrundmedium erfolgreich angepasst werden kann. Unsere numerischen Simulationen in COMSOL Multiphysics bestätigen, dass unser Tarnkappendesign seine Funktion selbst für ein un stetiges Hintergrundmedium sehr gut erfüllt, siehe Abbildung.

Literatur

- [1] D. Torrent and J. Sanchez-Dehesa: *Acoustic cloaking in two dimensions: a feasible approach*, New Journal of Physics 10 (2008).
- [2] S. Guenneau, R. C. McPhedran, S. Enoch, A. B. Movchan, M. Farhat and N. P. Nicorovici: *The colours of cloaks*, Journal of Optics (2010)
- [3] J. B. Pendry, D. Schurig and D. R. Smith: *Controlling electromagnetic fields*, Science 312, 1780 (2006)

Ausblick

Nach ersten erfolgreichen Untersuchungen bietet es sich an, Tarnkappen für allgemeinere Szenarien aufzustellen. Theoretische Fragen ergeben sich im Falle singularer und/oder nichtdifferenzierbarer Materialparameter $\tilde{\varrho}, \tilde{B}$. Eine numerische Simulation einer für die Praxis hochrelevanten bilaminaren Tarnkappe in einem *inhomogenen* Hintergrundmedium ist ebenfalls von großem Interesse.

¹ Institut für Angewandte und Numerische Mathematik 4, Karlsruher Institut für Technologie, Deutschland